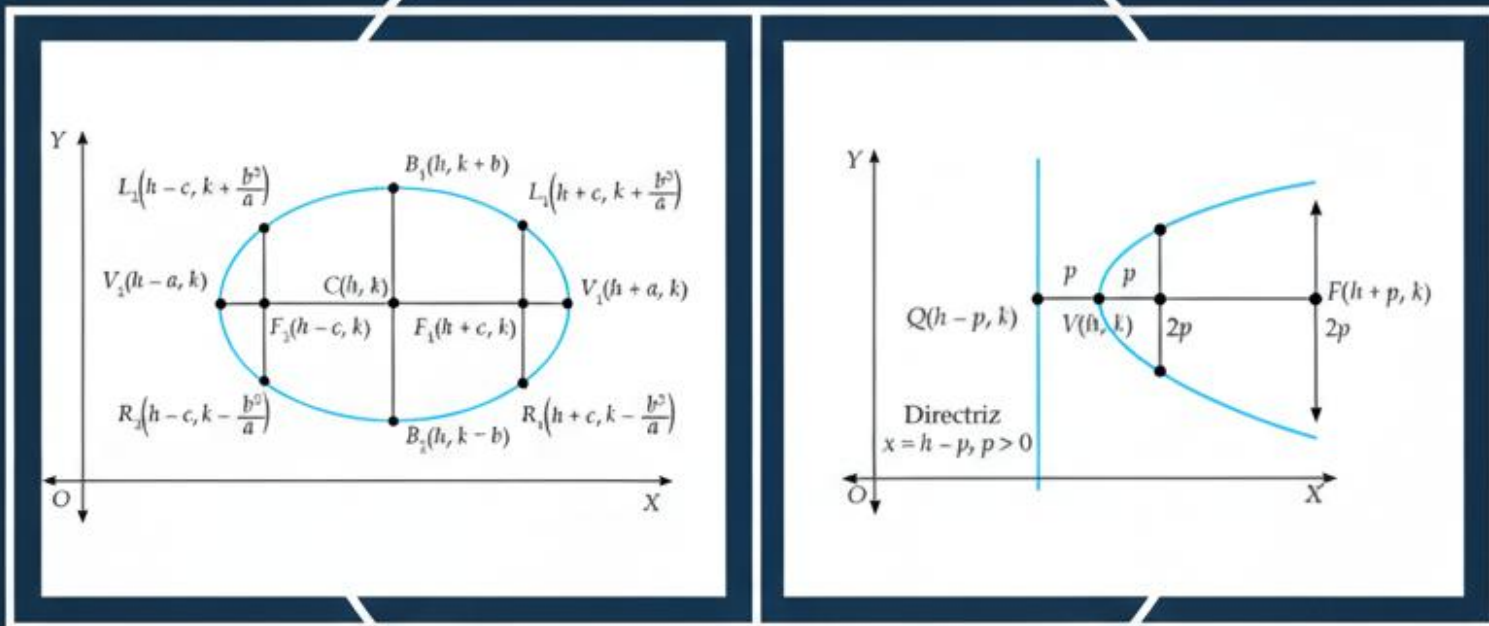


GEOMETRÍA ANALÍTICA

RECTA, CIRCUNFERENCIA, PARÁBOLA, ELIPSE E HIPÉRBOLA

Modalidad semiescolarizada



EXPLORA LAS CÓNICAS

Contenido

Dedicatoria y agradecimientos.....	2
Presentación	4
Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Temas Selectos de Matemáticas III.....	6
PA 1. Introducción a la geometría analítica.....	8
PA 2. La línea recta	28
PA 3. La circunferencia	46
PA 4. La parábola.....	63
PA 5. La elipse	84
PA 6. La hipérbola	106
Bibliografía consultada.....	128
Referencia a las fuentes de consulta de imágenes.....	128
Referencia a las fuentes de consulta de códigos QR	129

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes.

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación a la enseñanza de la geometría analítica ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento analítico. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestra más sincera gratitud. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Nombre	UAP
Jesús Antonio García Duarte	Los Mochis
Pedro Alberto Alarcón Morales	Los Mochis
Naysin Yunibbe Bañuelos Millán	Los Mochis
César Pilar Quintero Campos	La Cruz
Martín Luna Belmar	La Cruz
Efrain Meza Valdez	La Cruz
Silvestre Trinidad Quintero Ibarra	La Cruz
Policarpo Sicaños Avitia	Hermanos Flores Magón
Felipe de Jesús Sicaños Avitia	Navolato
Paloma Sandoval Gámez	C.U. Mochis

Oscar Mauricio Heredia Ruiz	C.U. Mochis
Horacio Gabriel López Ramírez	C.U. Mochis
Eva Edith Verdugo Serrano	Ruiz Cortines
Juana María Armenta Trasviña	Guasave Diurna
Aline Guadalupe Núñez Solís	San Blas, ext. Higuera de los Natochis

Presentación

Es un placer presentarles este libro de Temas Selectos de Matemáticas III, que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Temas Selectos de Matemáticas III del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al sexto semestre del componente fundamental y extendido del plan de estudios de la modalidad mixta opción mixta (UAS, 2024) del Currículo del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como:
un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar sobre la anterior un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento analítico.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Temas Selectos de Matemáticas III desarrolla la geometría analítica para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. Introducción a la geometría analítica.
- PA 2. La línea recta.
- PA 3. La circunferencia.
- PA 4. La parábola.
- PA 5. La elipse.
- PA 6. La hipérbola.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos, actividades y evaluación formativas diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje; al final cuenta con instrumentos para la autoevaluación y coevaluación.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro del estudiantado, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación, la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño.

Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: <https://parzibyte.me/apps/generador-qr/>), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje. En cuanto a las representaciones gráficas que se incluyen, estas fueron hechas en Desmos.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

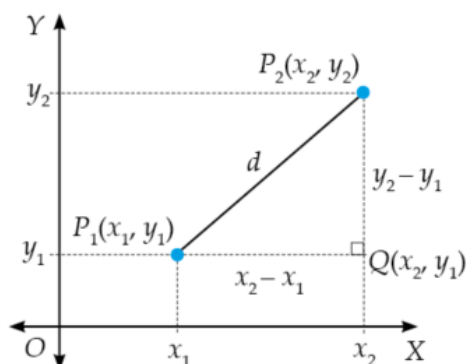
¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del pensamiento matemático!

Tabla de categorías, subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Temas Selectos de Matemáticas III

PENSAMIENTO MATEMÁTICO			
Categorías			
C1 Procedural	C2 Procesos de Intuición y Razonamiento	C3 Solución de problemas y modelación	C4 Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	S1 Capacidad para observar y conjeturar	S1 Uso de modelos	S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	S2 Pensamiento intuitivo		S2 Negociación de significados
	S3 Pensamiento formal	S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	S3 Ambiente matemático de Comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para	M1-C2 Observa y obtiene información de una	M1-C3 Selecciona un modelo matemático	M1-C4 Describe situaciones o

resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	.	M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
		M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	

PA 1. Introducción a la geometría analítica



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Progresión de aprendizaje 1

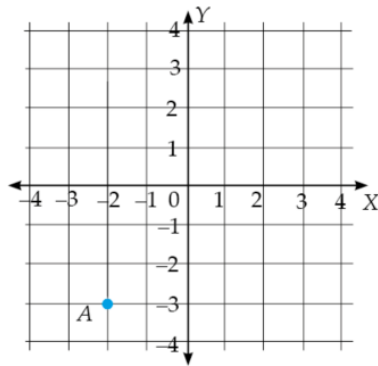
Reconoce y analiza las relaciones fundamentales entre puntos y rectas en el plano cartesiano, y utiliza conceptos como la distancia, el punto medio y la pendiente para describir, representar y resolver situaciones geométricas básicas en contextos reales o abstractos.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 1.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. ¿Cómo se llaman los ejes que forman el plano cartesiano?
 - a) Eje horizontal y eje inclinado.
 - b) Eje de las abscisas y eje de las ordenadas.
 - c) Eje principal y eje secundario.
2. En el plano cartesiano, un punto representa:
 - a) La distancia del punto al eje X .
 - b) La distancia del punto al eje Y .
 - c) La posición del punto con respecto al origen.
3. En la siguiente gráfica, ¿qué coordenada tiene el punto A ?



- a) $(2, -3)$
- b) $(-3, -2)$
- c) $(-2, -3)$

La geometría analítica es una rama de las matemáticas que une la geometría y el álgebra mediante un sistema de coordenadas para estudiar figuras geométricas. Su desarrollo se atribuye a René Descartes.

Te has preguntado, ¿cómo se puede describir con números cosas tan visuales como la localización de una ubicación en un mapa o en un croquis, así como la trayectoria de un dron? La geometría analítica hace esto posible representando y analizando figuras utilizando coordenadas en el plano cartesiano.

En términos generales, la geometría analítica estudia dos problemas fundamentales:

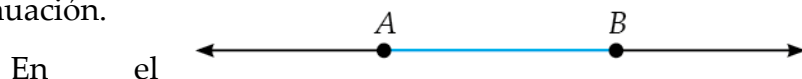
1. Dada una ecuación, representar el lugar geométrico que describe (discusión de un lugar geométrico).
2. Dadas las condiciones que deben cumplir los puntos que forman el lugar geométrico, encontrar su ecuación.

El estudio inicia con el reconocimiento del plano cartesiano como un sistema de referencia que permite ubicar puntos mediante coordenadas. A partir de esta representación, se abordan conceptos como la distancia entre dos puntos, el punto

medio de un segmento y la pendiente de una recta. Estos elementos no solo son la base para comprender las relaciones espaciales en el plano, sino que también te preparan para abordar temas más avanzados, como el estudio de las cónicas.

Segmento rectilíneo dirigido y distancia dirigida

En geometría euclidiana, se entiende que un segmento de recta, denotado por $\overline{AB}$, representa el mismo segmento que $\overline{BA}$. Se define como una porción de recta comprendida entre dos puntos, A y B , cuya longitud se indica como AB o BA . Cabe destacar que en esta representación no se considera el sentido, como se muestra a continuación.



En el estudio de la geometría analítica es necesario considerar tanto la distancia que hay entre los extremos de un segmento, así como su sentido (positivo o negativo). Para indicar este sentido, se establece una convención donde se escribe primero el punto de origen y después el punto extremo, dando lugar a lo que se conoce como **segmento dirigido**. Este concepto nos lleva a utilizar el término de **distancia dirigida**, que incorpora tanto el valor numérico de la separación entre dos puntos como su sentido, determinando si esta distancia dirigida es positiva o negativa.

El segmento dirigido, $\overrightarrow{AB}$, como se muestra en la figura de la derecha, tiene un sentido que va del punto A hacia el punto B . Esto significa que A actúa como el origen y B como el extremo, por lo que $\overrightarrow{AB}$ representa una distancia dirigida positiva. La notación $\overrightarrow{AB}$ se utiliza tanto para denotar el segmento dirigido como la distancia dirigida asociada.



El segmento dirigido, $\overrightarrow{BA}$, como se muestra en la figura de la derecha, tiene un sentido que va del punto B hacia el punto A . Es decir, B es el origen y A el extremo, por lo que se considera que $\overrightarrow{BA}$ representa una distancia dirigida negativa (puedes encontrar la justificación de esto en el video a través del código QR 1.1). La notación $\overrightarrow{BA}$ se utiliza tanto para denotar el segmento dirigido como la distancia dirigida correspondiente.

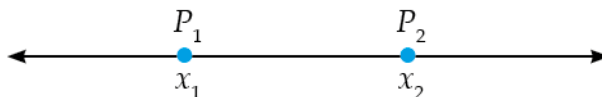


Código QR 1.1. Distancia dirigida. Video de MatCódigo.
Fuente: Parzibyte, 2025

Distancia dirigida y no dirigida entre dos puntos en la recta real

Cuando los puntos P_1 y P_2 se encuentran sobre una misma recta, como ocurre en la recta real, es posible establecer una medida entre ellos de dos formas distintas: una que considera el sentido y otra que no lo toma en cuenta.

La **distancia dirigida** entre dos puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, mostrados en la siguiente figura.



Se representa de dos formas según su origen y su extremo.

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1 \text{ o } \overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$$

Donde x_1 y x_2 representan las coordenadas del punto P_1 y del punto P_2 en la recta numérica, respectivamente.

En este caso, el orden de los puntos es fundamental: la distancia dirigida es positiva si x_2 se encuentra a la derecha (es mayor que) de x_1 , y negativa si está a la izquierda (es menor que). Por tanto, $\overline{P_1P_2}$ representa una distancia dirigida positiva, mientras que $\overline{P_2P_1}$ representa una distancia dirigida negativa.

Este tipo de distancia será especialmente útil cuando estudies la progresión de aprendizaje de la parábola, ya que necesitarás calcular la distancia del vértice al foco, la cual es una distancia dirigida.

Por otro lado, la **distancia no dirigida** entre dos puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, también conocida simplemente como **distancia**, se representa mediante el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas:

$$d_{p_1p_2} = |x_2 - x_1| \text{ o } |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1|$$

La notación, $d_{p_1p_2}$, se lee, la distancia del punto P_1 al punto P_2 . Esta distancia expresa únicamente la separación entre los puntos, sin importar el orden en que se consideren. Por esta razón, se cumple que $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$. La **distancia no dirigida** siempre es un valor **no negativo**.

Ejemplo formativo 1.1

1. Calcula la distancia dirigida determinada por los puntos $A(-4)$ y $B(7)$. También, calcula la distancia (distancia no dirigida) entre dichos puntos.

Resolución

$$\begin{aligned} \text{Distancia dirigida} \\ \overline{AB} &= 7 - (-4) = 7 + 4 = 11 \\ \overline{BA} &= -4 - 7 = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Distancia} \\ d_{AB} &= |7 - (-4)| = |7 + 4| = 11 \\ d_{BA} &= |-4 - 7| = |-11| = 11 \end{aligned}$$

La distancia no dirigida, que de aquí en adelante nos referiremos a ella como distancia, se utiliza cuando lo importante es conocer únicamente la separación entre dos puntos, sin considerar el sentido. Este concepto no solo aplica en la recta real, sino que también se extiende al plano cartesiano, cuando se estudia la distancia entre dos puntos.

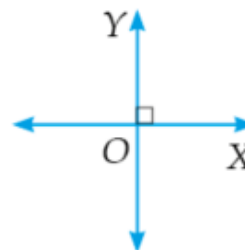
El plano cartesiano

¿Sabías que las actividades que realizas todos los días pueden representarse en un sistema de coordenadas? Desde ubicar tu posición en un mapa hasta diseñar un videojuego, todo parte de una idea fundamental: el plano cartesiano.

El **plano cartesiano** es un sistema que permite ubicar cualquier punto en una superficie plana usando dos números llamados coordenadas. Este sistema, como ya se dijo, fue propuesto por el matemático René Descartes, y desde entonces se ha usado para vincular el álgebra con la geometría.

Como se muestra en la figura de la derecha, el plano cartesiano está compuesto por dos rectas numéricas perpendiculares, en donde:

- El eje X (horizontal) es llamado eje de las abscisas.
- El eje Y (vertical) es llamado eje de las ordenadas.
- El punto donde se cruzan se llama origen que se denota mediante la letra O y tiene coordenadas $(0, 0)$.

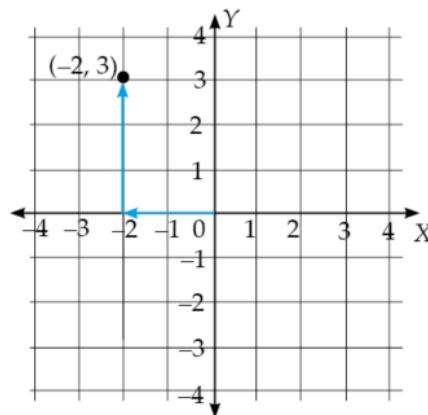


Cada punto en el plano cartesiano se representa por un par ordenado (x, y) :

- El número x indica cuánto se avanza a la derecha (positivo) o a la izquierda (negativo).
- El número y indica cuánto se avanza hacia arriba (positivo) o hacia abajo (negativo).

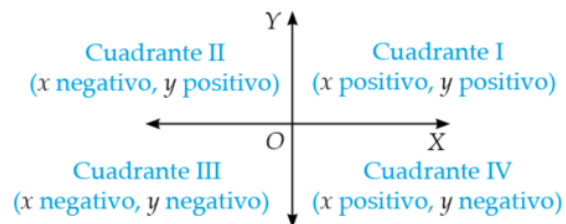
Por ejemplo, en la siguiente figura, partiendo del origen, el punto $(-2, 3)$ está 2 unidades a la izquierda del eje Y y 3 unidades arriba del eje X .

$(-2, 3)$
 Dos unidades a la izquierda Tres unidades hacia arriba



Los puntos también pueden representarse mediante letras mayúsculas, como A, B, C, P, Q , etc. Por ejemplo, podemos decir, el punto A tiene coordenadas $(-2, 3)$, lo cual se escribe como $A(-2, 3)$.

El plano cartesiano se divide en cuatro regiones llamadas cuadrantes, numeradas en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj, como se muestra a la derecha.



En la siguiente tabla se muestran puntos, el signo de cada coordenada y el cuadrante en el que se localizan.

Punto	Signo de la coordenada x	Signo de la coordenada y	Cuadrante
$A(2, 3)$	+	+	I
$B(-4, 5)$	-	+	II
$C(-3, -1)$	-	-	III
$D(4, -2)$	+	-	IV

Para ubicar puntos en el plano cartesiano, puedes utilizar herramientas digitales como Desmos o GeoGebra. Este software de uso libre permite trazar ejes, ingresar coordenadas, ver los cuadrantes en pantalla y mover puntos de forma dinámica para observar cómo cambian sus coordenadas. Esto facilita la comprensión visual de los conceptos y te ayuda a verificar tus respuestas en tiempo real.

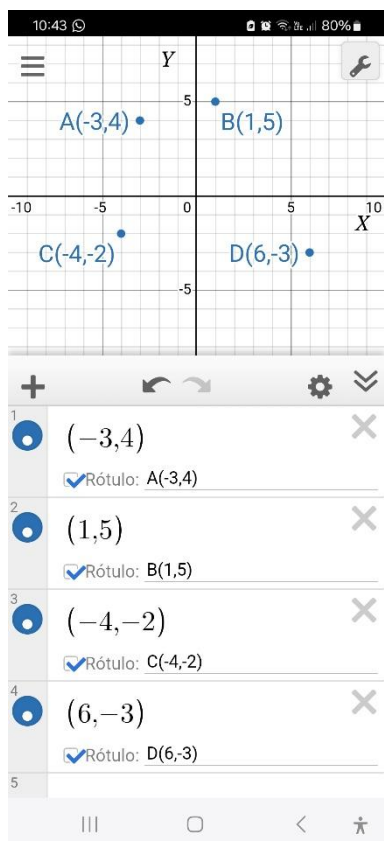


Figura 1.1. Puntos graficados en Desmos.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

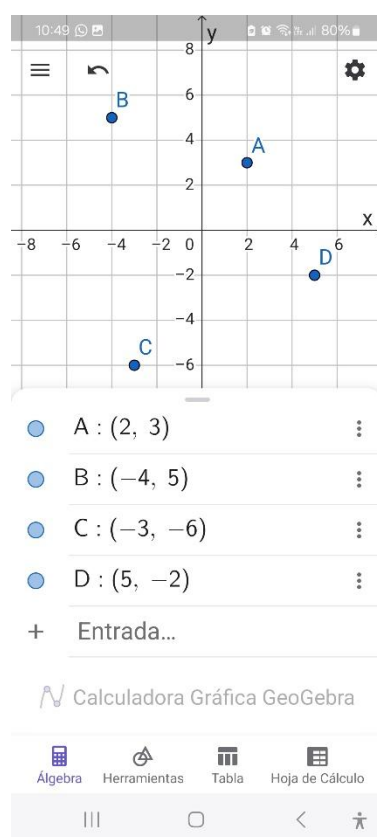


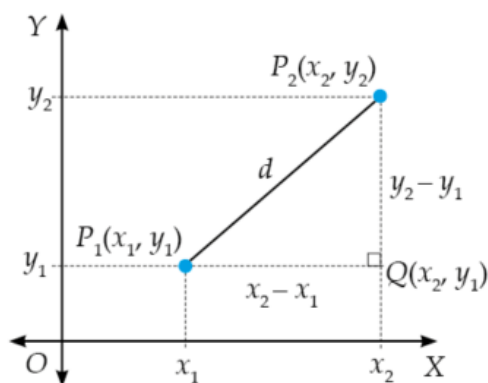
Figura 1.2. Puntos graficados en GeoGebra.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2025).

Distancia entre dos puntos en el plano

En la vida cotidiana, calcular distancias es algo común, por ejemplo, la distancia entre dos ciudades, entre dos personas en un parque o entre dos puntos en un plano. En geometría analítica, la distancia entre dos puntos se puede obtener utilizando sus coordenadas, gracias a una fórmula basada en el teorema de Pitágoras.

Sean dos puntos cualesquiera en el plano, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. La distancia entre ellos se denota como $d_{p_1p_2}$ y se calcula de la siguiente forma:

En el triángulo P_1QP_2 de la siguiente figura, por el teorema de Pitágoras



$$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_1Q})^2 + (\overline{QP_2})^2$$

De la figura de la izquierda,

$$\overline{P_1Q} = x_2 - x_1 \text{ y } \overline{QP_2} = y_2 - y_1$$

Como $(\overline{P_1P_2})^2 = d_{p_1p_2}^2$, entonces

$$d_{p_1p_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Luego, la distancia del punto P_1 a P_2 es

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dado que cada una de las diferencias $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$ se eleva al cuadrado, el resultado final siempre es un valor no negativo que representa la distancia que hay del punto P_1 a P_2 o del punto P_2 a P_1 , sin importar su dirección. Es decir

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d_{p_2p_1}$$

Si en un par de puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, se tiene que:

- Si $y_1 = y_2$, tenemos una distancia horizontal, por lo que

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

- Si $x_1 = x_2$, tenemos una distancia vertical, por lo que

$$d_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$

Ejemplo formativo 1.2

1. Calcula la distancia entre los puntos $A(-3, 5)$ y $B(6, -1)$.

Resolución

De $A(-3, 5)$ y $B(6, -1)$, se tiene que $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 6, y_2 = -1$

Sustituyendo en la fórmula

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(6 - (-3))^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{(6 + 3)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{9^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = \sqrt{3^2 \cdot 13} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{13} = 3\sqrt{13} \end{aligned}$$

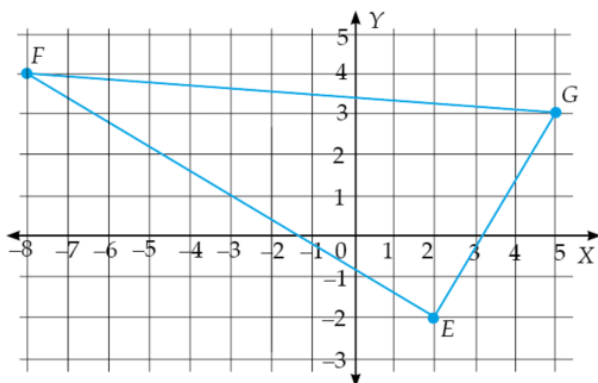
La distancia de A a B es $3\sqrt{13}$ u, donde u significa unidades.

Ejemplo formativo 1.3

1. Demuestra que los puntos $E(2, -2)$, $F(-8, 4)$ y $G(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Resolución

Si los puntos E , F y G son los vértices de un triángulo rectángulo, estos deben cumplir que la suma de los cuadrados de sus lados menores es igual al cuadrado del lado mayor.



$$\begin{aligned}d_{EG} &= \sqrt{(5 - 2)^2 + (3 - (-2))^2} \\&= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{GF} &= \sqrt{(-8 - 5)^2 + (4 - 3)^2} \\&= \sqrt{(-13)^2 + 1^2} = \sqrt{170} \text{ u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{FE} &= \sqrt{(2 - (-8))^2 + (-2 - 4)^2} \\&= \sqrt{(10)^2 + (-6)^2} = \sqrt{136} \text{ u}\end{aligned}$$

Comprueba que las longitudes obtenidas satisfacen el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}d_{GF}^2 &= d_{FE}^2 + d_{EG}^2 \\(\sqrt{170})^2 &= (\sqrt{136})^2 + (\sqrt{34})^2 \\170 &= 136 + 34 \\170 &= 170\end{aligned}$$

Con esto se demuestra que el triángulo EFG es un triángulo rectángulo.

Ejemplo formativo 1.4

1. Demuestra que los puntos $A(-6, -3)$, $B(-2, -1)$ y $C(4, 2)$ son colineales (están sobre una misma recta).

Resolución

Calcula las distancias entre los puntos:

$$d_{AB} = \sqrt{(-2 - (-6))^2 + (-1 - (-3))^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

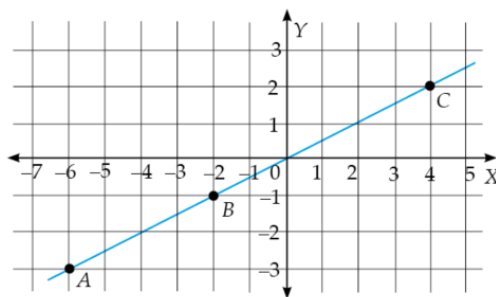
$$d_{BC} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5} \text{ u}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(4 - (-6))^2 + (2 - (-3))^2} = \sqrt{(10)^2 + 5^2} = \sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = 5\sqrt{5} \text{ u}$$

Los puntos son colineales si se satisface que la mayor de las distancias obtenidas es igual a la suma de las otras, es decir:

$$\begin{aligned}d_{AC} &= d_{AB} + d_{BC} \\5\sqrt{5} &= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\5\sqrt{5} &= 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

Al cumplirse la condición, se tiene que los puntos son colineales, es decir, están sobre una misma recta.



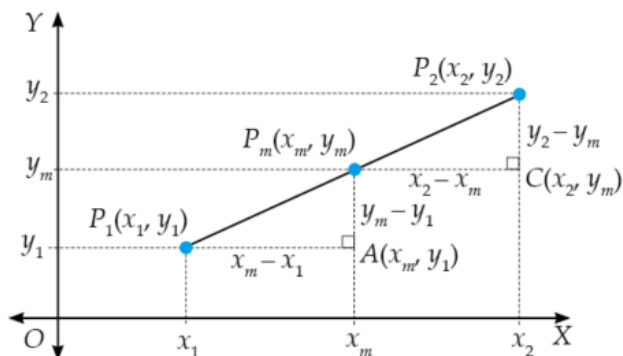
Coordenadas del punto medio de un segmento

En geometría analítica, así como en muchas situaciones cotidianas, es común calcular el punto que está exactamente a la mitad entre dos ubicaciones, este punto se llama punto medio.

El **punto medio** de un segmento lo divide en **dos partes iguales**. Si tienes dos puntos extremos, el punto medio es aquel cuyas coordenadas están exactamente a la mitad de las coordenadas de los extremos.

La cámara de un celular usa esta lógica al tomar una fotografía, encontrando puntos de equilibrio visual entre elementos importantes de la imagen. En canchas deportivas, para marcar el centro del campo entre las porterías. Los arquitectos y constructores la utilizan para encontrar el centro exacto de espacios, ventanas, puertas o elementos decorativos. Al diseñar una fachada de una casa, necesitan ubicar elementos centrados entre dos puntos de referencia.

Determinemos las coordenadas del punto medio entre dos puntos. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta y sea $P_m(x_m, y_m)$ su punto medio. Como se muestra en la siguiente figura.



Al ser P_m punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ se tiene que los segmentos $\overline{P_1P_m}$ y $\overline{P_mP_2}$ son del mismo tamaño por lo que tienen la misma longitud, en consecuencia, se pueden establecer las siguientes igualdades.

$x_m - x_1 = x_2 - x_m$ Despeja x_m $x_m + x_m = x_1 + x_2$ $2x_m = x_1 + x_2$ $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$		$y_m - y_1 = y_2 - y_m$ Despeja y_m $y_m + y_m = y_1 + y_2$ $2y_m = y_1 + y_2$ $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$
--	--	--

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ son

$$P_m \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo formativo 1.5

1. Determina las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $A(3, 5)$ y $B(2, -1)$.

Resolución

Sustituye $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 2$, $y_2 = -1$, en las siguientes fórmulas.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \quad ; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio son $P_m(2.5, 2)$.

Pendiente de una recta

Imagina que estás subiendo una rampa o caminando por una calle inclinada. Algunas subidas son suaves y otras muy empinadas. Esa idea de inclinación se puede medir en matemáticas con un concepto llamado pendiente. La pendiente es una medida que nos dice qué tan inclinada está una recta respecto al eje horizontal.

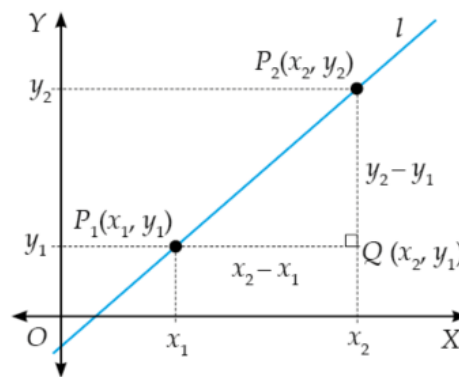
La **pendiente de una recta** es un número que indica **la razón de cambio vertical respecto al cambio horizontal** entre dos puntos de la recta, como se muestra en la siguiente figura.

Si la recta l pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ como se muestra en la figura de la derecha, la pendiente que se representa con la letra m , se calcula mediante la fórmula:

$$m = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2$$

Dependiendo de qué punto se establezca como P_1 y cual como P_2 , la fórmula de la pendiente puede escribirse como:

$$m_{p_1 p_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad m_{p_2 p_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



Según el valor (positivo, negativo o cero) de la pendiente, la recta puede comportarse de distintas maneras:

Valor de m	Tipo de pendiente	Comportamiento de la recta	Gráfica
$m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$	Pendiente nula	Recta horizontal	
$m > 0$	Pendiente positiva	Crece de izquierda a derecha	
Indefinido $m = \frac{y_2 - y_1}{0}$	Indefinida	Recta vertical	
$m < 0$	Pendiente negativa	Decrece de izquierda a derecha	

Ejemplo formativo 1.6

1. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, 1)$ e interpreta su valor.

Resolución

Sustituye $x_1 = 2, y_1 = -1, x_2 = 3, y_2 = 1$ en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$m = \frac{1 - (-1)}{3 - 2} = \frac{1 + 1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, 1)$ es $m = 2$. Esto significa que por cada unidad que se avanza horizontalmente hacia la derecha, la recta sube 2 unidades verticalmente. Por tanto, se trata de una recta creciente, lo que implica que su trayectoria va en ascenso de izquierda a derecha.

Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

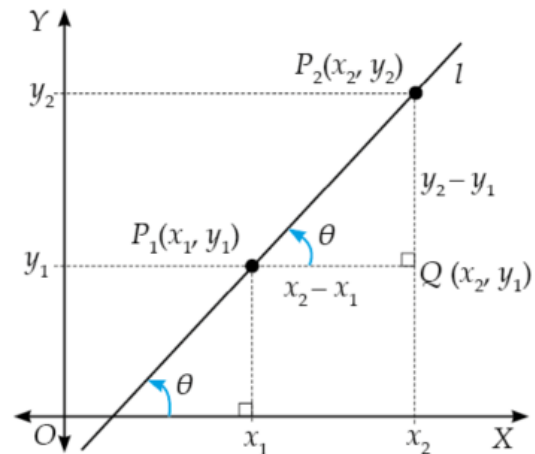
Toda recta forma un ángulo de inclinación θ con respecto al eje X . Este ángulo, que es positivo, se mide desde el eje X hacia la recta en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

La pendiente m y el ángulo θ están relacionados mediante la función tangente. De la figura de la derecha se deduce que

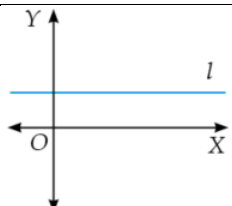
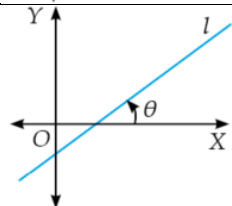
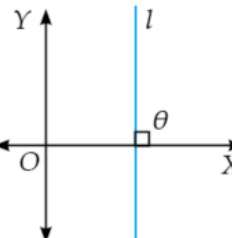
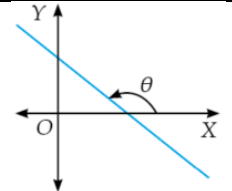
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y } \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2.$$

$$\text{De donde } m = \tan \theta \rightarrow \theta = \tan^{-1} m$$

El valor del ángulo θ nos da una idea de si la pendiente de la recta es nula, positiva, indefinida o negativa al indicar qué tan abierto o cerrado sea dicho ángulo respecto al eje X .



A continuación, se presentan los casos más comunes que relacionan el valor de la pendiente m con su correspondiente ángulo de inclinación θ :

Tipo de pendiente	Valor de m	Ángulo de inclinación	Gráfica
Pendiente nula	$m = \tan 0^\circ = 0$	$\theta = 0^\circ$	
Pendiente positiva	$m = \tan \theta > 0$	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	
Pendiente indefinida	Indefinido $m = \tan 90^\circ$	$\theta = 90^\circ$	
Pendiente negativa	$m = \tan \theta < 0$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	

Ejemplo formativo 1.7

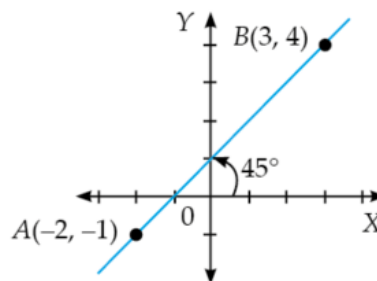
1. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, -1)$ y $B(3, 4)$.

Resolución

Sustituye $x_1 = -2, y_1 = -1, x_2 = 3, y_2 = 4$ en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$m = \frac{4 - (-1)}{3 - (-2)} = \frac{5}{5} = 1$$

Dado que $m = 1$, entonces, $\tan \theta = 1$, en consecuencia $\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$. Por tanto, $m = 1$ y $\theta = 45^\circ$.



Ejemplo formativo 1.8

1. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $C(-1, 2)$ y $D(4, -5)$.

Resolución

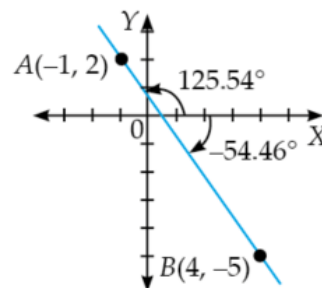
Sustituye $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 4, y_2 = -5$ en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$m = \frac{-5 - 2}{4 - (-1)} = \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5}$$

Como la pendiente es negativa, $m = -\frac{7}{5}$, entonces, el ángulo de inclinación es

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{7}{5}\right) + 180^\circ \approx -54.46^\circ + 180^\circ = 125.54^\circ$$

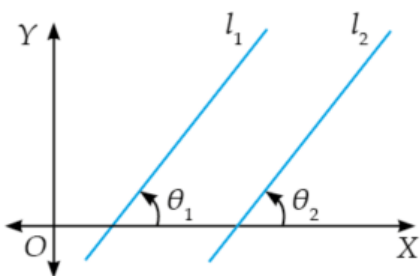
Por tanto, el valor de la pendiente es $-\frac{7}{5}$ y su ángulo de inclinación es de 125.54° .



Condición de paralelismos y condición de perpendicularidad

Cuando dos rectas se representan en el plano cartesiano, su comportamiento puede analizarse comparando sus pendientes. Las dos relaciones más importantes a estudiar son aquellas que permiten determinar si las rectas son paralelas o perpendiculares.

Dos **rectas son paralelas** si sus ángulos de inclinación con respecto al eje X son iguales y, por tanto, sus pendientes también. Para indicar que dos rectas son paralelas se usa el símbolo, $\parallel$.



Si $l_1 \parallel l_2$, entonces $\theta_1 = \theta_2$ por ser ángulos correspondientes en la figura de la izquierda.

Aplicando la función tangente, $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$, se obtiene que $m_1 = m_2$.

De lo anterior se concluye que, si dos rectas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

Ejemplo formativo 1.9

1. Determina si la recta que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(2, 3)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(1, 0)$ y $D(4, 6)$.

Resolución

Determina las pendientes.

$$m_{AB} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{y} \quad m_{CD} = \frac{6 - 0}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, entonces las rectas son paralelas.

Ejemplo formativo 1.10

1. Demuestra que los puntos $A(-2, -1)$, $B(2, 1)$, $C(3, 4)$ y $D(-1, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.

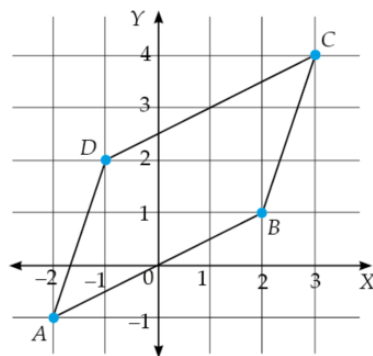
Resolución

Determina las pendientes.

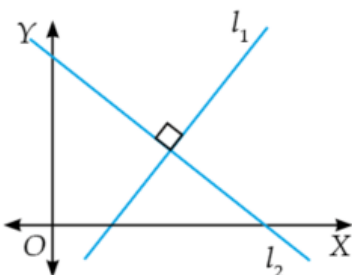
$$m_{AB} = \frac{1 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad m_{BC} = \frac{4 - 1}{3 - 2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$m_{CD} = \frac{2 - 4}{-1 - 3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}; \quad m_{DA} = \frac{-1 - 2}{-2 - (-1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Tenemos que $m_{AB} = m_{CD}$ y $m_{BC} = m_{DA}$, por tanto, se deduce que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$. Como los lados opuestos son paralelos, entonces la figura es un paralelogramo.



Así como el paralelismo nos permite identificar rectas que nunca se cruzan, también es importante reconocer el caso contrario: cuando dos rectas se intersectan formando un ángulo recto. En este caso, se dice que las rectas son perpendiculares, como se muestra en la siguiente figura.



Dos **rectas son perpendiculares** si el producto de sus pendientes es igual a -1 .

Para indicar que dos rectas son perpendiculares se usa el símbolo, $\perp$.

$$l_1 \perp l_2 \text{ si y solo si } m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Esto significa que sus pendientes son recíprocas negativas. Es decir, si una pendiente es m , la otra debe ser $-\frac{1}{m}$.

Ejemplo formativo 1.11

1. Determina si la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $C(0, 5)$ y $D(2, 3)$.

Resolución

Determina las pendientes.

$$m_{AB} = \frac{6 - 2}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{y} \quad m_{CD} = \frac{3 - 5}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$$

Luego

$$m_{AB} \cdot m_{CD} = 2 \cdot (-1) = -2$$

Dado que $m_{AB} \cdot m_{CD} \neq -1$, entonces, las rectas no son perpendiculares.

Ejemplo formativo 1.12

1. Determina si la recta que pasa por los puntos $E(2, 5)$ y $F(7, 3)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $G(-1, -2)$ y $H(1, 3)$.

Resolución

Determina las pendientes.

$$m_{EF} = \frac{3 - 5}{7 - 2} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \quad \text{y} \quad m_{GH} = \frac{3 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{3 + 2}{1 + 1} = \frac{5}{2}$$

Luego

$$m_{EF} \cdot m_{GH} = \left(-\frac{2}{5}\right) \left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{10}{10} = -1$$

Como $m_{EF} \cdot m_{GH} = -1$, entonces, las rectas son perpendiculares.

Evaluación formativa 1.1

1. Calcula la distancia dirigida y la distancia entre los puntos de la recta numérica cuyas coordenadas son:
a) $A(-5)$ y $B(6)$ b) $C(3)$ y $D(7)$ c) $E\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $F\left(-\frac{1}{2}\right)$ d) $G(-6)$ y $H\left(-\frac{7}{2}\right)$
2. Traza el triángulo formado por los puntos $A(3, -5)$, $B(-2, 4)$ y $C(7, 2)$ y calcula las longitudes de sus lados.
3. Una pareja de amigos se encuentra en un parque con caminos rectos que forman una cuadrícula. Paola está sentada en una banca ubicada en el punto $P(3, 5)$ y Ricardo está caminando en dirección contraria, partiendo del punto $R(-1, 2)$. ¿Cuál es la distancia en línea recta entre ambos si se mide sobre el plano del parque?
4. Determina el punto medio de los segmentos de recta definidos por los siguientes pares de puntos.
a) $A(-1, 3), B(9, 11)$ b) $D\left(\frac{2}{3}, -2\right), E\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
5. Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los siguientes puntos.
a) $A(-2, -1), B(-5, -2)$ b) $C(1, 5), D(4, 2)$
c) $E(-2, 6), F(5, 6)$ d) $G(3, 4), H(3, 5)$
6. Determina si la recta l_1 que pasa por los puntos A y B , es paralela, perpendicular o ni paralela ni perpendicular a la recta l_2 que pasa por los puntos C y D .
a) l_1 pasa por $A(1, 1)$ y $B(4, 6)$; l_2 pasa por $C(0, 3)$ y $D(2, 4)$
b) l_1 pasa por $A(0, 0)$ y $B(4, 2)$; l_2 pasa por $C(0, 0)$ y $D(2, -4)$
c) l_1 pasa por $A(1, 4)$ y $B(4, 10)$; l_2 pasa por $C(-2, -2)$ y $D(1, 4)$
d) l_1 pasa por $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$; l_2 pasa por $C(5, 10)$ y $D(7, 14)$
7. Demuestra que los cuatro puntos $A(-3, 1), B(-2, 5), C(2, 4)$ y $D(0, 1)$ son los vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.
8. Si la pendiente de la recta l_1 es $m_1 = \frac{1}{3}$.
a) ¿Cuál es la pendiente de cualquier recta paralela a l_1 ?
b) ¿Cuál es la pendiente de cualquier recta perpendicular a l_1 ?

Autoevaluación y coevaluación 1.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 1. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Interpreté el significado geométrico y contextual de los resultados obtenidos al calcular la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación. (M2-C1)			
Elaboré representaciones visuales (usando herramientas digitales) para establecer si dos rectas son paralelas o perpendiculares. (M1-C2)			
Resolví problemas que requieren aplicar las fórmulas de distancia, punto medio y de la pendiente de una recta. (M1-C3)			
Explicué en lenguaje matemático los procedimientos seguidos para calcular distancias, puntos medios y la pendiente de una recta. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 1 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con sus compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			

Interpretó el significado geométrico y contextual de los resultados obtenidos al calcular la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación. (M2-C1)			
Elaboró representaciones visuales (usando herramientas digitales) para establecer si dos rectas son paralelas o perpendiculares. (M1-C2)			
Resolvió problemas que requieren aplicar las fórmulas de distancia, punto medio y de la pendiente de una recta. (M1-C3)			
Explicó en lenguaje matemático los procedimientos seguidos para calcular distancias, puntos medios y la pendiente de una recta. (M1-C4)			

Nombre y firma de quien coevalúa

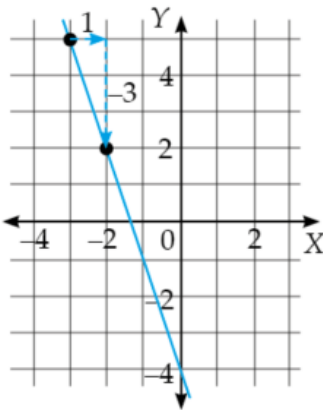
PA 2. La línea recta

Forma pendiente-ordenada
 $y = -3x - 4$

Forma punto-pendiente
 $y - 5 = -3(x + 3)$

Forma general
 $3x + y + 4 = 0$

Representación gráfica



Progresión de aprendizaje 2

Analiza las diferentes formas de la ecuación de la recta en diversos contextos, y desarrolla modelos matemáticos que utilicen relaciones entre rectas para resolver problemas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

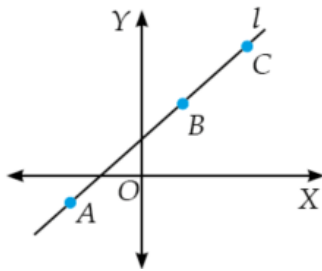
Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

- Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, 3)$ y $B(6, 7)$.
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{4}{3}$
- Si la pendiente de una recta es $m = -\frac{5}{2}$, ¿cuál es la pendiente de una recta paralela a ella?
a) $-\frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{2}$
- Si una recta tiene pendiente $m = \frac{3}{4}$, ¿cuál debe ser la pendiente de una recta perpendicular a ella?
a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{4}{3}$
- ¿Cuál es la fórmula para calcular la distancia de un punto (x_0, y_0) a una recta dada por la ecuación general $Ax + By + C = 0$?
a) $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ b) $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ c) $|A(x_0 + y_0) + C|$

La línea recta como lugar geométrico

En geometría analítica, la línea recta se puede interpretar no solo como un trazo, sino también como un lugar geométrico. Esto significa que la recta puede describirse como el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen una condición geométrica específica.

La **línea recta es el lugar geométrico** de los puntos tales que tomados dos a dos, las pendientes de los segmentos que forman son iguales.



De la figura de la izquierda, si A, B y C son tres puntos sobre la recta l , de acuerdo con la definición de línea recta como lugar geométrico, $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$.

Formas de la ecuación de la recta

La línea recta puede ser representada mediante diferentes formas algebraicas, cada una con sus propias ventajas según la información de que se disponga o se requiera destacar. Estas diferentes representaciones, que son equivalentes, son conocidas como formas de la ecuación de la recta.

Las diversas formas de representar la ecuación de una recta no son más que diferentes maneras de representar la misma información geométrica mediante una ecuación equivalente. Cada forma destaca aspectos particulares: algunas enfatizan la pendiente y la ordenada al origen y otras la pendiente y un punto sobre la recta.

Las ecuaciones equivalentes para representar la ecuación de una recta que veremos son:

- Ecuación pendiente-ordenada al origen.
- Ecuación punto-pendiente.
- Ecuación general.

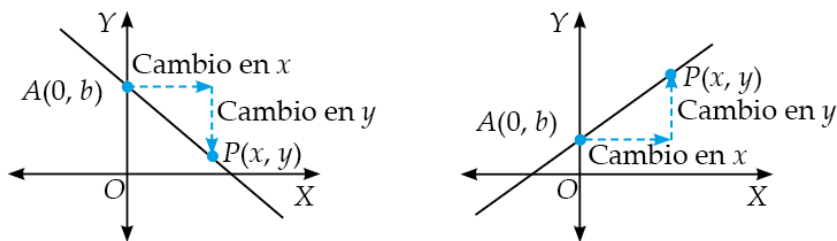
Ecuación pendiente ordenada al origen

Si conoces que la pendiente de la recta es m y su ordenada al origen es b , puedes deducir la ecuación pendiente ordenada al origen mediante el siguiente procedimiento.

La intercepción de la recta con el eje Y se da en el punto $(0, b)$. Por definición, la pendiente es

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x},$$

expresa la relación constante entre el cambio en y y el cambio en x . Considera ahora un segundo punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la recta, como se muestra en las siguientes figuras.



La pendiente de una recta que pasa por los puntos $A(0, b)$ y $P(x, y)$ es,

$$\frac{y - b}{x - 0} = m \rightarrow \frac{y - b}{x} = m \rightarrow y - b = mx \rightarrow y = mx + b$$

Así, la **ecuación pendiente ordenada al origen** de la recta es, $y = mx + b$.

La letra m representa la pendiente de la recta:

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

La letra b representa a la ordenada al origen y el punto $A(0, b)$, representa el intercepto de la recta con el eje Y .

Ejemplo formativo 2.1

1. Escribe la ecuación de la recta en la forma pendiente ordenada al origen, sabiendo que su pendiente 2 y su ordenada al origen es 3.

Resolución

Esto se puede hacer de dos formas, usando la fórmula de la pendiente o sustituyendo directamente en la ecuación $y = mx + b$.

Método 1. Usa la fórmula de la pendiente.

Su intercepción con el eje Y se da en el punto $B(0, 3)$, entonces

$$\frac{y - 3}{x - 0} = 2 \rightarrow \frac{y - 3}{x} = 2 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow y = 2x + 3$$

Método 2. Sustituye directamente en la ecuación $y = mx + b$.

$$m = 2 \text{ y } b = 3, \text{ entonces } y = 2x + 3$$

Por tanto, la ecuación pendiente ordenada al origen, con pendiente de la recta igual a 2 y ordenada al origen 3 es, $y = 2x + 3$.

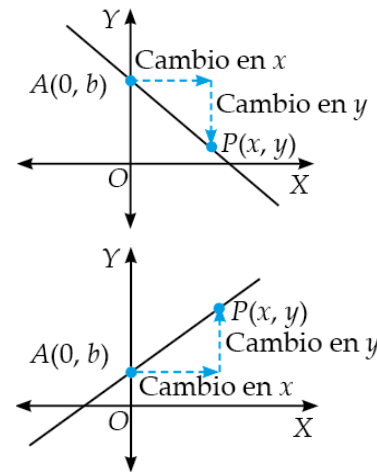
Cuando se tiene una ecuación $y = mx + b$, es posible graficarla usando sus dos características principales: la pendiente y la ordenada al origen. Para hacerlo, sigue estos pasos.

1. Ubica la ordenada al origen, b , en el plano cartesiano, como se muestra en las figuras de la derecha. La ordenada al origen corresponde al punto donde la recta cruza al eje Y. Este punto llamado intercepto tiene coordenadas $(0, b)$.
2. Utiliza la pendiente para encontrar un segundo punto. Recuerda que la pendiente m indica la razón de cambio entre las variables:

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

A partir del punto $A(0, b)$:

- Realiza el cambio en x mediante un desplazamiento horizontal (positivo hacia la derecha o negativo hacia la izquierda).
 - Luego, haz el cambio en y mediante un desplazamiento vertical (positivo hacia arriba o negativo hacia abajo).
 - Marca el punto de llegada.
3. Traza la recta. Une el punto $A(0, b)$ con el segundo punto que obtuviste mediante una línea recta que se extienda en ambas direcciones.



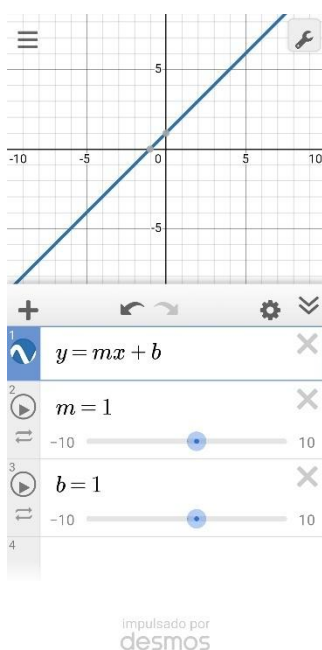
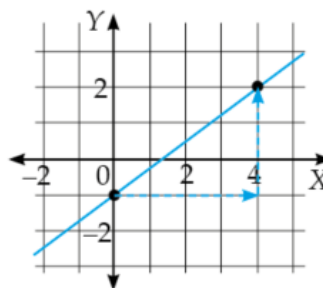
Ejemplo formativo 2.2

1. Grafica la recta cuya pendiente es $\frac{3}{4}$ y su ordenada al origen es -1 .

Resolución

La ordenada al origen es $b = -1$. Grafica el punto $E(0, -1)$.

La pendiente es $m = \frac{3}{4}$. El cambio en x es un desplazamiento de 4 unidades a la derecha y el cambio en y es un desplazamiento de 3 unidades hacia arriba. Marca el punto de llegada y traza la recta, como se muestra en la gráfica de la derecha.



Puedes utilizar Desmos para explorar de manera interactiva el efecto de la pendiente y de la ordenada al origen en la gráfica de una recta, como se muestra en la Figura 2.1.

La ecuación $y = mx + b$ representa una recta en el plano cartesiano, cuya forma gráfica depende directamente de los valores de los parámetros m (pendiente) y b (ordenada al origen).

La pendiente m determina la **inclinación** de la recta y la monotonía:

- Si $m > 0$, la recta **crece** de izquierda a derecha (pendiente positiva).
- Si $m < 0$, la recta **decrece** de izquierda a derecha (pendiente negativa).
- Si $m = 0$, la recta es **horizontal**, es decir, paralela al eje X .

La constante b controla el **desplazamiento vertical** de la recta.

Figura 2.1. Efectos de las constantes m y b en la gráfica de la línea recta.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

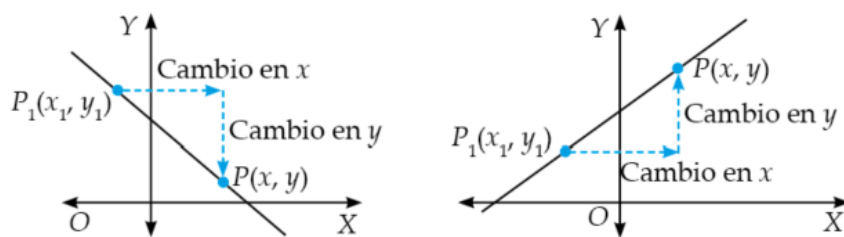
Ecuación punto pendiente

Cuando se conoce un punto $P_1(x_1, y_1)$ que pertenece a una recta y su pendiente m , es posible deducir la ecuación punto-pendiente, mediante un procedimiento similar al de la ecuación pendiente ordenada en el origen.

La recta pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y por definición, su pendiente es

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x},$$

que expresa la relación constante entre el cambio en y y el cambio en x . Considera ahora un segundo punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la recta, como se muestra en las siguientes figuras.



Por definición, la pendiente de una recta entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P(x, y)$ es,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Así, la **ecuación punto pendiente** de la recta es, $y - y_1 = m(x - x_1)$.

El punto $P_1(x_1, y_1)$ esta sobre la recta y m representa su pendiente.

Ejemplo formativo 2.3

1. Sabiendo que una recta pasa por el punto $A(-3, 5)$ y tiene pendiente -3 :
 - a) Traza la gráfica de la recta.
 - b) Determina la ecuación punto pendiente.
 - c) Transforma la ecuación punto pendiente en la ecuación pendiente ordenada al origen.

Resolución

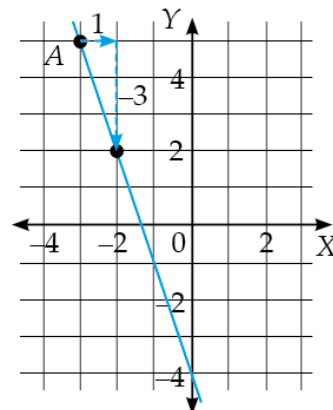
- a) Traza la gráfica de la recta.

Grafica el punto $A(-3, 5)$.

Usa la pendiente para determinar el segundo punto.

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = -3 = \frac{-3}{1}$$

Del punto $A(-3, 5)$, desplázate una unidad hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo. Marca el punto de llegada y traza la recta.



- b) Determina la ecuación punto-pendiente.

Sustituye directamente en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Dado que $m = -3$, $x_1 = -3$ y $y_1 = 5$, entonces

$$y - 5 = -3(x - (-3)) \rightarrow y - 5 = -3(x + 3).$$

La ecuación punto-pendiente es, $y - 5 = -3(x + 3)$.

c) Transforma la ecuación a la forma pendiente ordenada al origen.

$$y - 5 = -3(x + 3) \rightarrow y - 5 = -3x - 9 \rightarrow y = -3x - 4$$

La ecuación pendiente ordenada al origen es, $y = -3x - 4$.

Cuando se conocen dos puntos por los que pasa una recta, primero utiliza sus coordenadas para calcular la pendiente. Después, sustituye el valor de la pendiente y las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta.

Ejemplo formativo 2.4

1. Determina la ecuación de la recta en su forma punto pendiente, sabiendo que pasa por los puntos $A(3, 7)$ y $B(6, 8)$.

Resolución

Calcula la pendiente que pasa por los puntos $A(3, 7)$ y $B(6, 8)$.

$$m = \frac{8 - 7}{6 - 3} = \frac{1}{3}$$

Sustituye la pendiente $m = \frac{1}{3}$ y un punto en la ecuación punto pendiente, por ejemplo $A(3, 7)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = \frac{1}{3}(x - 3)$$

La ecuación punto pendiente es, $y - 7 = \frac{1}{3}(x - 3)$.

Ejemplo formativo 2.5

1. Un resorte se deforma 2 centímetros bajo la acción de una fuerza de 15 newtons, si la fuerza se incrementa a 25 newtons, entonces se deforma $3\frac{1}{3}$ de centímetro, ¿cuál es la ecuación pendiente ordenada al origen que representa la deformación que sufre el resorte en función de la fuerza?

Resolución

Sea x la fuerza que actúa sobre el resorte.

Sea y la deformación del resorte.

Considerando que $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, de los datos se tiene la siguiente pareja de puntos

$$A(15, 2) \text{ y } B\left(25, \frac{10}{3}\right)$$

Calcula la pendiente

$$m = \frac{\frac{10}{3} - 2}{25 - 15} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{6}{3}}{10} = \frac{\frac{4}{3}}{10} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{1}} = \frac{(4)(1)}{(3)(10)} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Sustituye el valor de la pendiente y las coordenadas del punto $A(15, 2)$ en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$$y - 2 = \frac{2}{15}(x - 15) \rightarrow y - 2 = \frac{2}{15}x - 2 \rightarrow y = \frac{2}{15}x$$

Por tanto, la ecuación de la deformación del resorte es, $y = \frac{2}{15}x$.

Forma general de la ecuación de la recta

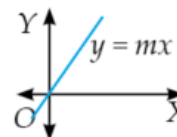
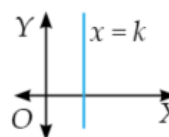
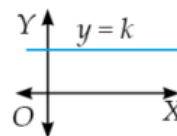
La **ecuación general de la recta** es $Ax + By + C = 0$, siendo una de las representaciones más utilizadas en geometría analítica para describir una línea recta en el plano cartesiano.

Esta forma de la ecuación tiene las siguientes características:

- A , B y C son enteros que no tienen factor común.
- A y B no son simultáneamente igual a cero.
- La ecuación general permite representar cualquier recta en el plano, incluyendo rectas verticales.

Cuando trabajamos con la ecuación $Ax + By + C = 0$:

- Si $B \neq 0$, puedes despejar y para obtener la forma pendiente ordenada al origen: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$.
- Si $A = 0$, entonces $B \neq 0$, y la ecuación se reduce a la forma: $y = -\frac{C}{B} = k$. Su representación gráfica es una recta paralela al eje X .
- Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$, y la ecuación se reduce a la forma: $x = -\frac{C}{A} = k$. Su representación gráfica es una recta paralela al eje Y .
- Si $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, la ecuación se reduce a la forma: $y = -\frac{A}{B}x$, que es equivalente a $y = mx$. Su representación gráfica representa una recta que pasa por el origen.



Ejemplo formativo 2.6

1. Dada la ecuación general recta, $3x + 5y - 15 = 0$:
 - a) Representala gráficamente.
 - b) Transfórmala en su forma pendiente ordenada en el origen.
 - c) Calcula su ángulo de inclinación.

Resolución

- a) Representala gráficamente.

Calcula los interceptos.

Intercepto con el eje Y. Haz $x = 0$,

$$3x + 5y - 15 = 0 \rightarrow 3(0) + 5y - 15 = 0 \rightarrow 5y - 15 = 0 \rightarrow y = 3$$

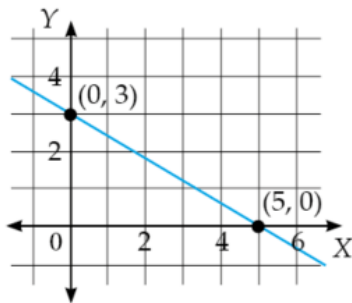
El intercepto en el eje Y es, $(0, 3)$.

Intercepto con el eje X. Haz $y = 0$,

$$3x + 5y - 15 = 0 \rightarrow 3x + 5(0) - 15 = 0 \rightarrow 3x - 15 = 0 \rightarrow x = 5$$

El intercepto en el eje X es, $(5, 0)$.

Grafica los interceptos y traza la línea recta.



- b) Transfórmala en su forma pendiente ordenada en el origen.

De la ecuación general, despeja y

$$3x + 5y - 15 = 0$$

$$5y = -3x + 15$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{15}{5}$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 3$$

La ecuación en su forma pendiente ordenada al origen es, $y = -\frac{3}{5}x + 3$.

- c) Calcula su ángulo de inclinación.

La pendiente de la recta $y = -\frac{3}{5}x + 3$, es $m = -\frac{3}{5}$.

El **ángulo de inclinación** θ de una recta está relacionado con la pendiente mediante la fórmula, $\tan \theta = m$.

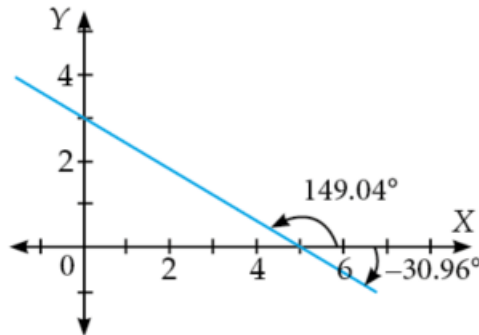
Por tanto, $\tan \theta = -\frac{3}{5}$. Recuerda que, si la pendiente es negativa,

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

Para encontrar θ , aplica la función inversa de la tangente, $\theta = \tan^{-1}(m)$. Al ser la tangente negativa,

$$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \rightarrow \theta \approx 180^\circ + (-30.96^\circ) \rightarrow \theta \approx 149.04^\circ$$

Por tanto, el ángulo de inclinación es aproximadamente de 149.04° , como se muestra en la siguiente gráfica.



La ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ se deduce a partir de la ecuación pendiente ordenada al origen o de la ecuación punto pendiente. El proceso implica igualar una de dichas ecuaciones a cero, luego multiplicar por un factor, si es necesario, para cancelar denominadores.

Ejemplo formativo 2.7

1. Escribe la ecuación $y = \frac{2}{3}x + 5$, en su forma general.

Resolución

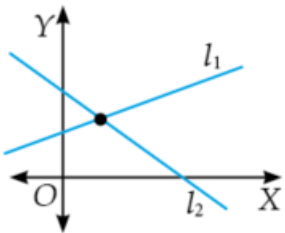
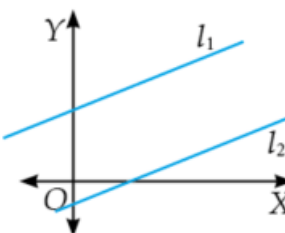
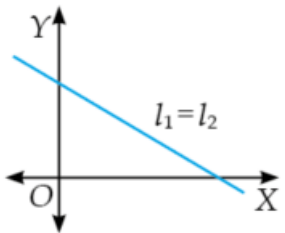
$$y = \frac{2}{3}x + 5 \rightarrow 3y = 3\left(\frac{2}{3}x + 5\right) \rightarrow 3y = 2x + 15 \rightarrow -2x + 3y - 15 = 0$$

Por tanto, la ecuación en su forma general es, $-2x + 3y - 15 = 0$.

Posiciones relativas de dos rectas en el plano

El estudio de las rectas en el plano cartesiano es importante para entender cómo se relacionan entre sí. Esta relación depende, principalmente de la comparación entre sus pendientes y sus ordenadas al origen. Al analizar estas características, es posible determinar si las rectas son secantes, paralelas o coincidentes.

Si observas dos rectas en el mismo plano, por ejemplo, l_1 y l_2 , estas pueden relacionarse de tres formas diferentes.

Rectas intersecantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes
		
Tienen diferentes pendientes, $m_1 \neq m_2$. Se cruzan en un solo punto, llamado punto de intersección. Este punto es la solución del sistema de ecuaciones que forman ambas rectas.	Tienen la misma pendiente ($m_1 = m_2$) y diferente ordenada al origen ($b_1 \neq b_2$). Nunca se cruzan, no importa cuánto las extendamos. El sistema de ecuaciones que forman no tiene solución.	Tienen la misma pendiente ($m_1 = m_2$) y la misma ordenada al origen ($b_1 = b_2$). Comparten todos sus puntos y son ecuaciones equivalentes. El sistema de ecuaciones que forman tiene infinitas soluciones.

Comprender las posiciones relativas de dos rectas en el plano es de gran ayuda al momento de resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: si las dos rectas se cortan, el sistema tiene una única solución; si son paralelas, el sistema no tiene solución; y si son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones.

Existen diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas, tres de ellos son: suma y resta, sustitución y el de igualación. Para conocer cada uno de ellos, puedes ver los videos a través de los códigos QR 2.1, 2.2 y 2.3. Aquí usaremos el de suma y resta o también llamado de reducción.



QR 2.1. Método de reducción.
Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.



QR 2.2. Método de igualación.
Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.



QR 2.3. Método de sustitución.
Video del profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Ejemplo formativo 2.8

1. Determina si las rectas $2x - 3y + 19 = 0$ y $3x + 2y - 6 = 0$ tienen una, infinitas o ninguna solución y con base en ello, concluye si son rectas intersecantes, paralelas o coincidentes.

Resolución

Escribe el sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 19 = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ como $\begin{cases} 2x - 3y = -19 & (1) \\ 3x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$

Elige la variable a cancelar, en este caso y .

Calcula el mínimo común múltiplo de 3 y 2: $\text{mcm}(2, 3) = 6$. Esto indica que la ecuación (1) se multiplica por 2 y la ecuación (2) por 3.

$$\begin{array}{rcl} (2)(2x - 3y) = (2)(-19) & \rightarrow & 4x - 6y = -38 \\ (3)(3x + 2y) = (3)(6) & \rightarrow & 9x + 6y = 18 \end{array}$$

Suma las ecuaciones obtenidas.

$$\begin{array}{r} 4x - 6y = -38 \\ 9x + 6y = 18 \\ \hline 13x = -20 \end{array}$$

Despeja x de $13x = -20$.

$$x = -\frac{20}{13}$$

Sustituye el valor de x en la ecuación (1) y despeja y .

$$\begin{aligned} 2\left(-\frac{20}{13}\right) - 3y &= -19 \rightarrow -\frac{40}{13} - 3y = -19 \rightarrow -3y = -19 + \frac{40}{13} \\ \rightarrow -3y &= -\frac{247}{13} + \frac{40}{13} \rightarrow -3y = -\frac{207}{13} \rightarrow y = -\frac{207}{-39} \rightarrow y = \frac{207}{39} \\ \rightarrow y &= \frac{69}{13} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto donde se cruzan las rectas es $\left(-\frac{20}{13}, \frac{69}{13}\right)$. El sistema de ecuaciones tiene una única solución, en consecuencia, las rectas se intersecan.

Ejemplo formativo 2.9

1. Determina si las rectas $4x - 8y + 12 = 0$ y $x - 2y + 3 = 0$ tienen una, infinitas o ninguna solución y con base en ello, concluye si son rectas intersecantes, paralelas o coincidentes.

Resolución

Escribe el sistema $\begin{cases} 4x - 8y + 12 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ como $\begin{cases} 4x - 8y = -12 & (1) \\ x - 2y = -3 & (2) \end{cases}$

Elige la variable a cancelar, en este caso x .

Multiplica la ecuación (2) por -4 .

$$\begin{array}{rcl} 4x - 8y = -12 & & 4x - 8y = -12 \\ (-4)(x - 2y) = (-4)(-3) & \rightarrow & -4x + 8y = 12 \end{array}$$

Suma las ecuaciones obtenidas.

$$\begin{array}{r} 4x - 8y = -12 \\ -4x + 8y = 12 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Observa que el resultado obtenido es $0 = 0$, esto significa que el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son coincidentes.

Ejemplo formativo 2.10

1. Determina si las rectas $4x + 3y - 12 = 0$ y $8x + 6y + 5 = 0$ tienen una, infinitas o ninguna solución y con base en ello, concluye si son rectas intersecantes, paralelas o coincidentes.

Resolución

Escribe el sistema $\begin{cases} 4x + 3y - 12 = 0 \\ 8x + 6y + 5 = 0 \end{cases}$ como $\begin{cases} 4x + 3y = 12 & (1) \\ 8x + 6y = -5 & (2) \end{cases}$

Elige la variable a cancelar, en este caso x .

Multiplica la ecuación (1) por -2 .

$$\begin{array}{rcl} (-2)(4x + 3y) = (-2)(12) & & -8x - 6y = -24 \\ 8x + 6y = -5 & \rightarrow & 8x + 6y = -5 \end{array}$$

Suma las ecuaciones obtenidas.

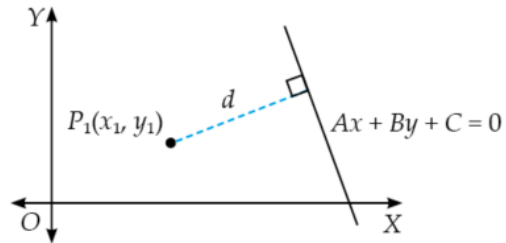
$$\begin{array}{r} -8x - 6y = -24 \\ 8x + 6y = -5 \end{array}$$

$$0 = -29$$

El resultado obtenido es $0 = -29$, lo cual es una contradicción. Esto significa que el sistema de ecuaciones no tiene solución, por tanto, las rectas son paralelas.

Distancia de un punto a una recta

En geometría analítica, una de las nociones más importantes al estudiar la posición relativa en el plano entre un punto y una recta, es la distancia mínima entre ellos. Esta distancia, d , se entiende como el segmento más corto que puede trazarse desde el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, y corresponde al segmento perpendicular a la recta y que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$, tal como se muestra en la gráfica de la derecha.



La distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ se calcula mediante la fórmula

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo formativo 2.13

1. Determina la distancia del punto $P(4, 3)$ a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Resolución

Identifica los valores.

De $P(4, 3)$: $x_1 = 4$, $y_1 = 3$

De $3x - 4y + 5 = 0$: $A = 3$, $B = -4$ y $C = 5$

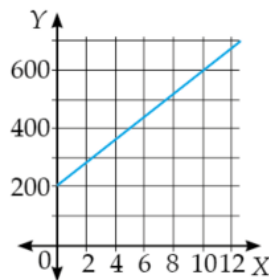
Sustituye los valores en la fórmula,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(4) + (-4)(3) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|12 - 12 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

Por tanto, la distancia del punto $P(4, 3)$ a la recta $3x - 4y + 5 = 0$, es una unidad.

Evaluación formativa 2.1

1. Escribe la ecuación de cada recta en la forma pendiente ordenada al origen y traza su gráfica, utilizando los siguientes valores de m y b .
a) $m = 4, b = 1$ b) $m = -1, b = 0$ c) $m = 3/5, b = -4$ d) $m = 0, b = -2$
2. Determina la ecuación de la recta cuya ordenada al origen es -5 y su ángulo de inclinación es de 135° .
3. Una empresa de mantenimiento de paneles solares cobra \$200 por la inspección inicial del sistema y \$40 por cada visita mensual de limpieza posterior. La siguiente gráfica muestra el costo total en función del número de visitas de mantenimiento.



- a) Escribe una ecuación en la forma pendiente ordenada al origen que modele el costo total en términos del número de visitas.
 - b) Explica que representan la pendiente y la ordenada al origen en el contexto del problema.
 - c) Calcula el costo total para la visita de mantenimiento número 19.
4. Traza la gráfica de la recta, determina su ecuación en forma punto-pendiente y transfórmala a la forma pendiente ordenada al origen, considerando que la recta tiene la pendiente m y pasa por el punto dado.
 - a) $m = 0$, pasa por el punto $A(3, 5)$.
 - b) $m = 4/7$, pasa por el punto $B(0, 12)$.
 - c) $m = -5$, pasa por el punto $C(-4, -2)$.
 5. Determina la ecuación punto pendiente de la recta que pasa por los pares de puntos indicados.
 - a) $A(2, 1/2)$ y $B(3, -4)$
 - b) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $D(\frac{1}{4}, \frac{1}{5})$
 - c) $E(\frac{3}{4}, -1)$ y $F(2, \frac{1}{2})$
 6. Dada la recta que pasa por $(2, 5)$ con pendiente $m = 3$, escríbela en:

Forma pendiente–ordenada: _____

Forma punto–pendiente: _____

Forma general: _____

Explica a un compañero cómo pasaste de una forma a otra.

7. Dadas las siguientes rectas: $y = 2x + 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 5$, determina:
- a) Si son paralelas, perpendiculares o secantes.
 - b) Si se cruzan, encuentra el punto de intersección.
 - c) Representa las dos rectas en una gráfica.
 - d) Imagina que estas rectas son calles, ¿cómo afectaría el tráfico si fueran paralelas? ¿y si se cruzaran?

8. Determina los puntos donde se intersecan los siguientes pares de rectas.

a) $\begin{cases} 5x - 3y - 1 = 0 \\ 4x - 5y + 32 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 8x + 12y - 4 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

9. Un edificio está en el punto $(3, 4)$ y una calle está representada por la ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

- a) Calcula la distancia mínima del edificio a la calle usando la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- b) Si la distancia mínima de seguridad es 5 m, ¿el edificio cumple con la norma?
- c) Dibuja la situación.



Autoevaluación y coevaluación 2.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 2. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué procedimientos algorítmicos para transformar ecuaciones de la recta entre sus distintas formas (pendiente-ordenada, punto-pendiente y ecuación general). (M1-C1)			
Identifiqué las características clave de una recta (pendiente, intersecciones, ordenada al origen) en representaciones gráficas. (M1-C2)			
Calculé la distancia de un punto a una recta. (M1-C3)			
Expliqué a mis compañeros los pasos seguidos para deducir si dos rectas se intersecan, son paralelas o coinciden. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

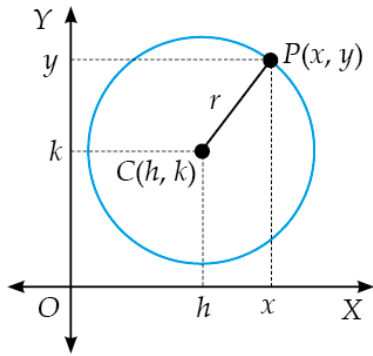
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 2 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con sus compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Aplicó procedimientos algorítmicos para transformar ecuaciones de la recta entre sus			

distintas formas (pendiente-ordenada, punto-pendiente y ecuación general). (M1-C1)			
Identificó las características clave de una recta (pendiente, intersecciones, ordenada al origen) en representaciones gráficas. (M1-C2)			
Calculó la distancia de un punto a una recta. (M1-C3)			
Explicó a sus compañeros los pasos seguidos para deducir si dos rectas se intersecan, son paralelas o coinciden. (M2-C4)			

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 3. La circunferencia



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{Donde } D = -2h, E = -2k \text{ y } F = h^2 + k^2 - r^2$$

Progresión de aprendizaje 3

Analiza las propiedades de la circunferencia y formula aplicaciones que utilicen estas propiedades en campos como la astronomía o la navegación.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			

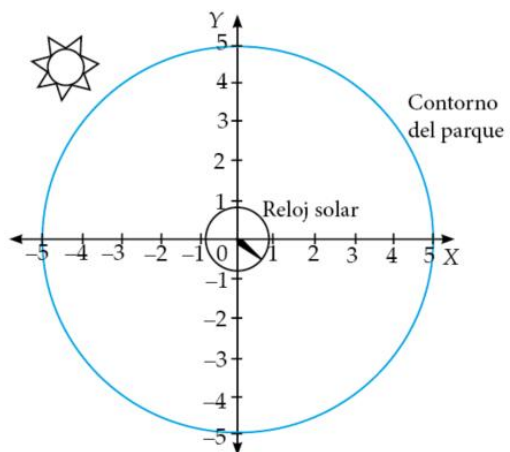
Evaluación diagnóstica 3.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta escrita en forma punto-pendiente que pasa por el punto $Q(2, -3)$ y tiene pendiente $m = 1/2$?
a) $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$ b) $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3)$ c) $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$
2. Si una recta tiene pendiente $m = -3/4$, ¿cuál es la pendiente de una recta perpendicular a ella?
a) $m = \frac{3}{4}$ b) $m = \frac{4}{-3}$ c) $m = \frac{4}{3}$
3. ¿Cuál es el resultado de desarrollar el binomio al cuadrado $(2x - 5)^2$?
a) $4x^2 - 10x + 25$ b) $4x^2 - 20x + 25$ c) $4x^2 + 20x + 25$
4. ¿Cuál es la factorización del trinomio cuadrado perfecto $9x^2 + 12x + 4$?
a) $(3x + 2)^2$ b) $(3x + 4)^2$ c) $(9x + 2)^2$
5. ¿Cuál es el término que completa a la expresión $x^2 + 10x$ para que sea un trinomio cuadrado perfecto?
a) 5 b) 25 c) 100

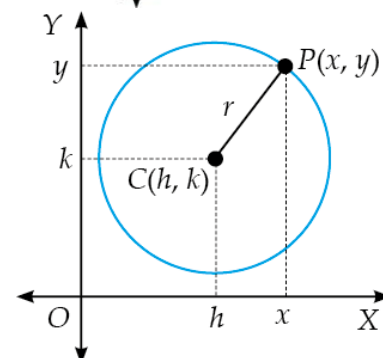
Elementos de la circunferencia

Un parque circular tiene un reloj solar instalado exactamente en su centro, el cual está ubicado en el punto $C(0,0)$ del plano cartesiano, que representa un croquis del parque, como se muestra en la figura de la derecha. Si la distancia desde el centro del reloj hasta la orilla del parque es de 5 metros, ¿cuál es la ecuación que representa el contorno del parque?



En el marco de la geometría analítica, el estudio de las figuras geométricas se traslada al plano cartesiano, permitiendo describirlas y analizarlas a través del lenguaje algebraico. Entre estas figuras destaca la circunferencia, una curva cerrada y simétrica con respecto a su centro.

La **circunferencia** se define como el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. El **centro** se



denota como $C(h, k)$ y la distancia de cualquier punto $P(x, y)$ de la circunferencia al centro $C(h, k)$, es la longitud del **radio**, r , como se muestra en la gráfica de la derecha.

Ecuación ordinaria de la circunferencia

Para determinar la ecuación de una circunferencia a partir de su lugar geométrico formado por todos los puntos del plano que se encuentran a una misma distancia r de un punto fijo $C(h, k)$, llamado centro, sea $P(x, y)$ un punto que pertenece al lugar geométrico.

La distancia entre $P(x, y)$ y el centro $C(h, k)$ es igual a r . Es decir,

$$|\overline{CP}| = r$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

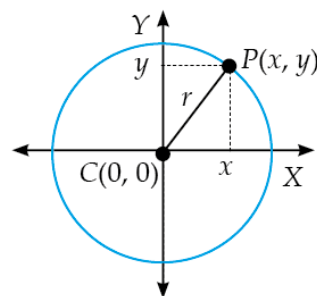
Elevamos ambos lados al cuadrado para cancelar la raíz cuadrada.

$$\left(\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}\right)^2 = r^2 \rightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Esta ecuación describe el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al centro es constante.

A la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ se le llama **ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen**. Como caso particular, si el centro se encuentra en el origen, como en la gráfica de la derecha, es decir, $C(0, 0)$, la ecuación se simplifica a

$$x^2 + y^2 = r^2,$$



y se llama, **ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen**.

Ejemplo formativo 3.1

1. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen y radio $r = \sqrt{5}$.

Resolución

El centro está en el origen: $C(0, 0)$.

El radio es, $r = \sqrt{5}$.

La ecuación es de la forma $x^2 + y^2 = r^2$, entonces $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$.

La ecuación ordinaria de la circunferencia es, $x^2 + y^2 = 5$.

Ejemplo formativo 3.2

1. Grafica la ecuación de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 = 25$.

Resolución

Para graficar la ecuación de la circunferencia hay que calcular las coordenadas del centro y su radio.

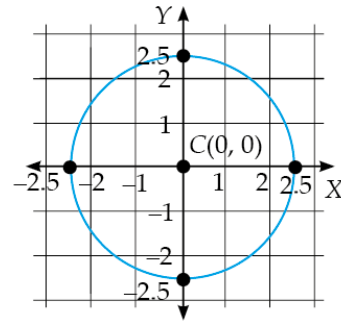
Transforma la ecuación $4x^2 + 4y^2 = 25$ en su forma ordinaria.

$$\begin{aligned}4x^2 + 4y^2 &= 25 \\4(x^2 + y^2) &= 25 \\x^2 + y^2 &= \frac{25}{4}\end{aligned}$$

Donde

$$r^2 = \frac{25}{4} \rightarrow r = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ y } C(0, 0).$$

La gráfica de la ecuación de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 = 25$, se muestra a la derecha.



Ejemplo formativo 3.3

1. Una fuente circular está construida en el centro de una plaza. Para representar el plano de la plaza en un croquis digital, se toma el centro de la fuente como el origen del sistema de coordenadas. Se sabe que el diámetro de la fuente es de 8 metros. ¿Cuál es la ecuación ordinaria que representa el contorno de la fuente?

Resolución

El centro está en el origen: $C(0, 0)$.

El diámetro mide 8 metros, por lo que el radio, r , mide 4 metros.

La ecuación es de la forma $x^2 + y^2 = r^2$, entonces $x^2 + y^2 = 4^2$.

La ecuación ordinaria que representa el contorno de la fuente es, $x^2 + y^2 = 16$.

Después de haber estudiado la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, es momento de ampliar esta noción y explorar una representación más general: la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen, denotado como $C(h, k)$.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Al desplazar el centro de la circunferencia del origen del sistema de coordenadas a un punto arbitrario, la estructura de la ecuación cambia ligeramente, pero conserva su esencia: representa un conjunto de puntos cuya distancia al centro es constante.

En la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, intervienen tres constantes: h , k y r . Estos representan, las coordenadas del centro

(h es la abscisa y k la ordenada) y r el radio de la circunferencia. Para determinar esta ecuación, es necesario conocer el valor de estas tres constantes, ya que definen por completo su posición y tamaño en el plano cartesiano.

Puedes usar la aplicación Desmos en tu celular, para estudiar el efecto que surten las constantes h , k y r en la gráfica de la circunferencia, como se muestra en la Figura 3.1. Estas constantes determinan la posición y el tamaño de la circunferencia en el plano cartesiano.

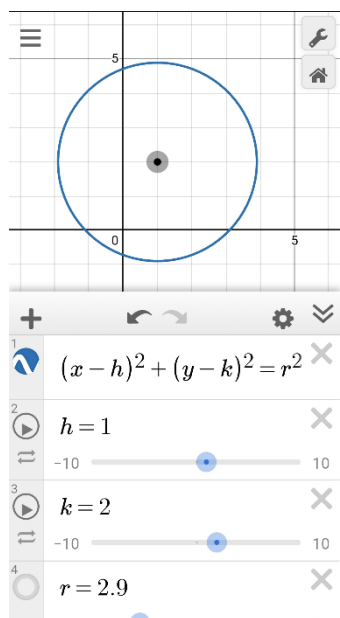


Figura 3.1. Efectos de las constantes h , k y r en la gráfica de la circunferencia.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

El efecto de la constante h sobre la gráfica es un desplazamiento horizontal:

- Si $h > 0$, la circunferencia se desplaza hacia la derecha.
- Si $h < 0$, la circunferencia se desplaza hacia la izquierda.

Aunque en la expresión $(x - h)^2$, h aparece con signo negativo, el valor de la abscisa del centro $C(h, k)$ es h .

El efecto de la constante k sobre la gráfica es un desplazamiento vertical:

- Si $k > 0$, la circunferencia se desplaza hacia arriba.
- Si $k < 0$, la circunferencia se desplaza hacia abajo.

Aunque en la expresión $(y - k)^2$, k aparece con signo negativo, el valor real de la ordenada del centro $C(h, k)$ es k .

La constante r representa la distancia constante desde el centro de la circunferencia hasta cualquiera de sus puntos. Controla directamente el tamaño de la

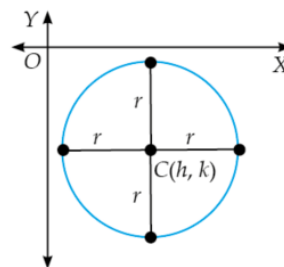
circunferencia:

- Si r aumenta, la circunferencia incrementa su tamaño.
- Si r disminuye, la circunferencia disminuye su tamaño.

Como r aparece al cuadrado en la ecuación de la circunferencia, este valor siempre debe ser no negativo, ya que representa el cuadrado de una distancia. En el contexto del plano cartesiano real, una distancia (y por tanto el radio) no puede ser negativo. Recuerda que el radio de la circunferencia se calcula como $r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$.

Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia conociendo las coordenadas del centro y su radio

Si conoces el centro $C(h, k)$ de una circunferencia y su radio, r , puedes determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia, sustituyendo directamente los valores de h , k y r en la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, y así graficarla, como se muestra en la figura de la derecha.



Ejemplo formativo 3.4

1. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $C(-4, 5)$ y radio 5, luego grafícala.

Resolución

El centro de la circunferencia es $C(-4, 5)$ y $r = 5$.

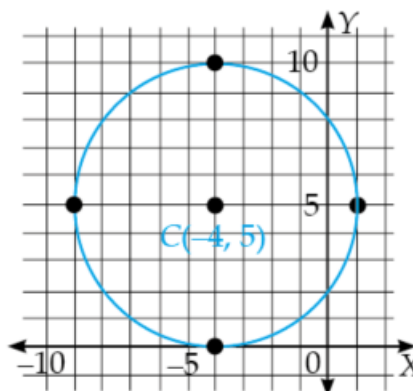
Observa que $h = -4$ y $k = 5$.

La ecuación es $(x - (-4))^2 + (y - 5)^2 = 5^2$, es decir, $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Para graficar la circunferencia:

Paso 1. Grafica el centro de la circunferencia en $C(-4, 5)$.

Paso 2. A partir del centro, traza varios puntos que estén a 5 unidades de distancia del mismo. Puedes moverte 5 unidades a la derecha y a la izquierda a lo largo de la recta $y = 5$, obteniendo los puntos $(-9, 5)$ y $(1, 5)$; y también puedes moverte 5 unidades hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta $x = -4$, obteniendo los puntos $(-4, 10)$ y $(-4, 0)$. Luego, une los puntos con una curva suave.

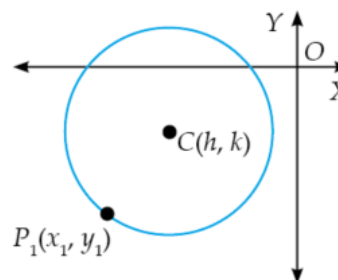


La gráfica de la circunferencia con centro en $C(-4, 5)$ y radio $r = 5$ se muestra a la derecha.

Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia conociendo las coordenadas del centro y de un punto sobre la circunferencia

Si conoces el centro y un punto sobre la circunferencia, como se muestra en la figura de la derecha, puedes usar la distancia entre el centro $C(h, k)$ y el punto $P_1(x_1, y_1)$ para determinar la longitud del radio.

$$r = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$



Luego, puedes sustituir los valores de h , k y r en la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Ejemplo formativo 3.5

1. Determina y grafica la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $C(-1, -1)$ y que pasa por el punto $Q(5, -5)$.

Resolución

El centro de la circunferencia es $C(-1, -1)$.

Determina el radio calculando la distancia entre los puntos $C(-1, -1)$ y $Q(5, -5)$, mediante la fórmula

$$r = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$

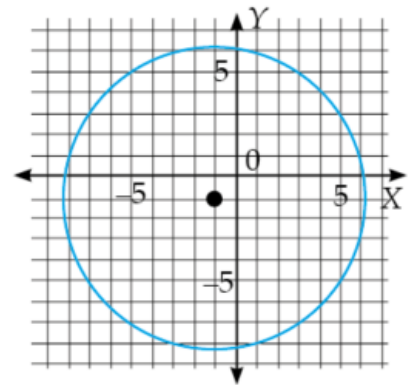
Para $h = -1, k = -1, x_1 = 5$ y $y_1 = -5$, tienes que

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(5 - (-1))^2 + (-5 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{(5 + 1)^2 + (-5 + 1)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{36 + 16} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$\begin{aligned} (x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 &= (\sqrt{52})^2 \\ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 &= 52 \end{aligned}$$

Su gráfica se muestra a la derecha.

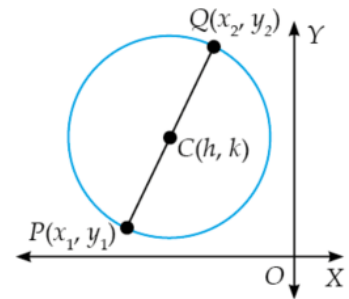


Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia conociendo las coordenadas de los puntos extremos de su diámetro

También puedes determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia conociendo los puntos extremos del diámetro, como se muestra en la figura de la derecha. Por ejemplo, si los puntos extremos del diámetro son: $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, el diámetro lo puedes calcular mediante

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

En este caso, el radio de la circunferencia es igual a la mitad de su diámetro, $r = d_{PQ}/2$.



Las coordenadas del centro de la circunferencia, $C(h, k)$, las puedes obtener hallando las coordenadas del punto medio del diámetro.

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y \quad k = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo formativo 3.6

1. Determina y grafica la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyos puntos extremos de su diámetro son $P(2, 6)$ y $Q(0, -4)$.

Resolución

Usa la fórmula de la distancia entre dos puntos para hallar la longitud del diámetro, sabiendo que $x_1 = 2, y_1 = 6, x_2 = 0$ y $y_2 = -4$.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-4 - 6)^2} = \sqrt{2^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{4 + 100} = \sqrt{104} \end{aligned}$$

Por lo que la longitud del radio es $r = \frac{\sqrt{104}}{2}$ y $r^2 = \left(\frac{\sqrt{104}}{2}\right)^2 = \frac{104}{4} = 26$.

Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia

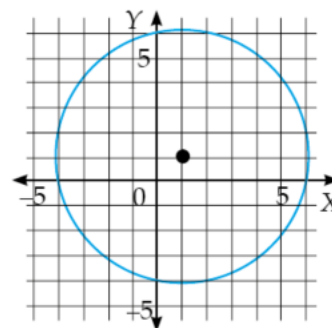
$$\begin{aligned} h &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 0}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ k &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + (-4)}{2} = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

En consecuencia, las coordenadas del centro son $C(1, 1)$.

La ecuación de la circunferencia solicitada es

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 26$$

La gráfica se muestra en la figura de la derecha.



Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia conociendo las coordenadas del centro y la ecuación de la recta tangente

También es posible determinar la ecuación ordinaria de una circunferencia cuando se conoce su centro $C(h, k)$ y la ecuación de una recta tangente a ella, de la forma $Ax + By + C = 0$. En este caso, la distancia entre el centro y la recta tangente corresponde al radio de la circunferencia. Una vez calculado dicho radio, se sustituyen las coordenadas del centro $C(h, k)$ y del radio r en la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Una tangente a una circunferencia es una recta en el plano que interseca a la circunferencia en un único punto. Este punto de contacto se denomina punto de tangencia.

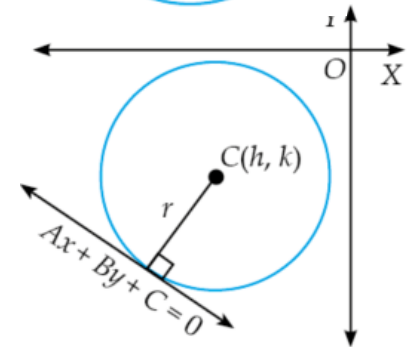


Una propiedad de la tangente a una circunferencia es que es perpendicular al radio trazado desde el centro de la circunferencia hasta el punto de tangencia.



Para calcular el radio, hay que determinar la distancia entre el centro $C(h, k)$ y la ecuación de la recta tangente, $Ax + By + C = 0$. Esta distancia se obtiene mediante la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

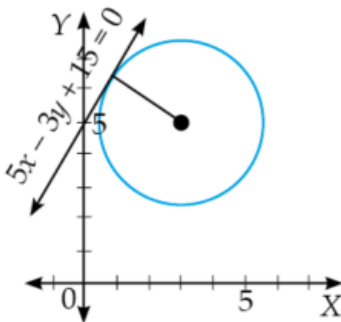
$$r = \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Ejemplo formativo 3.7

1. Halla la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $C(3, 5)$, sabiendo que la recta, $5x - 3y + 15 = 0$ es tangente a ella.

Resolución



El centro de la circunferencia es $C(3, 5)$, $h = 3$ y $k = 5$.

La ecuación de la recta tangente es $5x - 3y + 15 = 0$, $A = 5$, $B = -3$ y $C = 15$.

Calcula el radio mediante la fórmula

$$\begin{aligned} r &= \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(5)(3) + (-3)(5) + 15|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{|15 - 15 + 15|}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{|15|}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}} \end{aligned}$$

Sustituye $h = 3$, $k = 5$ y $r = \frac{15}{\sqrt{34}}$ en la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = \left(\frac{15}{\sqrt{34}}\right)^2, \text{ entonces la ecuación solicitada es}$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = \frac{225}{34}$$

Ecuación general de la circunferencia

La forma general de la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde D , E y F son constantes. Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios al cuadrado e igualar a cero la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, como se hace a continuación.

$$\begin{aligned}(x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0\end{aligned}$$

Donde $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

En la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, intervienen tres constantes: D , E y F . Para determinar esta ecuación, es necesario conocer su valor.

Usa la aplicación Desmos en tu celular, para estudiar el efecto que surten las constantes D , E y F en la gráfica de la circunferencia, como se muestra en la Figura 3.2.

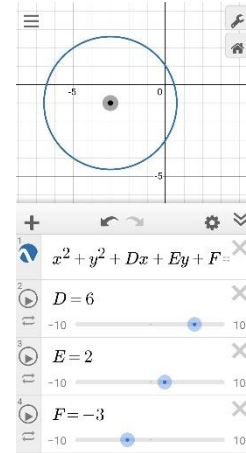


Figura 3.2. Efectos de las constantes D , E y F en la gráfica de la circunferencia.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Ejemplo formativo 3.8

1. Determina la ecuación general de la circunferencia a partir de la ecuación ordinaria $(x + 4)^2 + y^2 = 3$.

Resolución

$$\begin{aligned}(x + 4)^2 + y^2 &= 3 \\ x^2 + 8x + 16 + y^2 &= 3 && \text{Desarrolla el binomio} \\ x^2 + y^2 + 8x + 16 - 3 &= 0 && \text{Iguala a cero} \\ x^2 + y^2 + 8x + 13 &= 0 && \text{Simplifica}\end{aligned}$$

La ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 8x + 13 = 0$.

También, a partir de la ecuación general de la circunferencia,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

puedes obtener su ecuación ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, usando el método conocido como completando el trinomio cuadrado perfecto.

El método de completar el trinomio cuadrado perfecto consiste en partir de una expresión de la forma $a^2 + 2ab$ y completar el trinomio cuadrado perfecto $a^2 + 2ab + b^2$, para poder factorizarlo como el cuadrado de un binomio, $(a + b)^2$, de modo que:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Ahora, para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia partiendo de la ecuación general, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, agrupa los términos que tienen la misma variable y transpón la F .

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

Para completar el cuadrado de una expresión de la forma $x^2 + Dx$, se le suma el término $\left(\frac{D}{2}\right)^2$. Lo mismo se hace para $y^2 + Ey$, se le suma el término $\left(\frac{E}{2}\right)^2$. En este caso, dado que tenemos una ecuación, se le suman en ambos lados de la igualdad para mantener la equivalencia.

$$\left(x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2\right) = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

Factoriza los trinomios

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 &= -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 &= -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} \end{aligned}$$

Luego, haz

$$h = -\frac{D}{2}, k = -\frac{E}{2} \text{ y } r^2 = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

En consecuencia, se obtiene la ecuación ordinaria de la circunferencia, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Ejemplo formativo 3.9

1. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia a partir de la ecuación general $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.

Resolución

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$$

$$x^2 + 6x + y^2 + 2y = -6$$

$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 2y) = -6$$

$$\left(x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = -6 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$(x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 + 2y + 1^2) = -6 + 9 + 1$$

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

La ecuación ordinaria de la circunferencia es $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Para saber más: la circunferencia que pasa por tres puntos.

Existe un caso interesante en geometría analítica que consiste en determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos no colineales del plano.

Resolver este problema implica plantear un sistema de ecuaciones a partir de la ecuación general de la circunferencia y sustituir las coordenadas de los tres puntos para obtener los valores de las constantes desconocidas.

Si te interesa explorar sobre este tema, puedes investigar cómo se aplica un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas para deducir la ecuación general de la circunferencia a partir de tres puntos dados. En el código QR 3.1 puedes ver un video sobre este tema.



QR 3.1. Ecuación de la circunferencia conociendo 3 puntos. Video profe Alex.
Fuente: Parzibyte, 2025.

Recta tangente a una circunferencia

Para determinar la ecuación de la recta tangente a una circunferencia en un punto dado, se necesita conocer:

- La ecuación de la circunferencia (en su forma ordinaria o en su forma general) para obtener las coordenadas del centro, $C(h, k)$.
- El punto de tangencia $P(x_0, y_0)$, que junto con las coordenadas del centro se calcula la pendiente de la recta tangente.

Con los puntos $C(h, k)$ y $P(x_0, y_0)$, calcula la pendiente de la recta r que pasa por dichos puntos, como se muestra en la figura de la derecha.

$$m_r = \frac{y_0 - k}{x_0 - h}.$$

Luego, halla la pendiente de la recta tangente, denotada por t en la figura de la derecha, recuerda que la recta tangente es perpendicular al radio, así que $m_t \cdot m_r = -1$, de donde

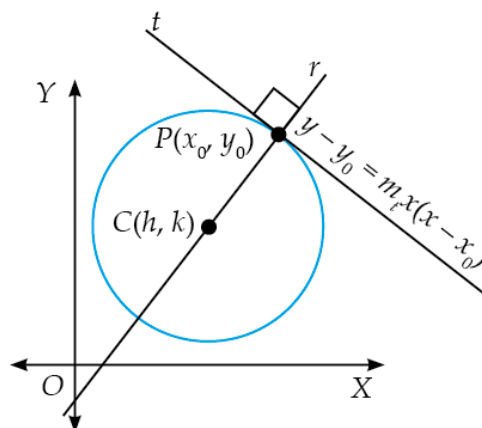
$$m_t = -\frac{1}{m_r}.$$

Por último, usa la ecuación de la recta punto-pendiente y sustituye en ella, las coordenadas del punto de tangencia $P(x_0, y_0)$ y la pendiente m_t , para obtener la ecuación de la recta tangente

$$y - y_0 = m_t(x - x_0).$$

La cual puede expresarse en la forma pendiente ordenada al origen

$$y = m_t x + b, \text{ donde } b = y_0 - m_t x_0.$$



Ejemplo formativo 3.10

1. Determina la ecuación pendiente ordenada al origen de la recta tangente a la circunferencia dada por $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 18$ en el punto $P(5, 6)$.

Resolución

El centro de la circunferencia es $C(2, 3)$, de donde $h = 2$ y $k = 3$.

El punto de tangencia es $P(5, 6)$, de donde $x_0 = 5$ y $y_0 = 6$.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $C(2, 3)$ y $P(5, 6)$, es

$$m_r = \frac{y_0 - k}{x_0 - h} = \frac{6 - 3}{5 - 2} = \frac{3}{3} = 1$$

La pendiente de la recta tangente en el punto $P(5, 6)$, es

$$m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{1} = -1$$

Por último, la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $P(5, 6)$ se determina mediante la ecuación

$$y - y_0 = m_t(x - x_0)$$

$$y - 6 = -1(x - 5)$$

$$y - 6 = -x + 5$$

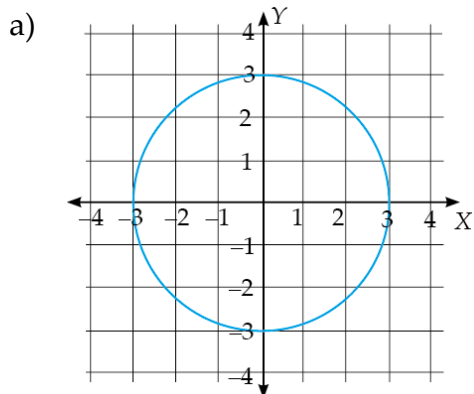
$$y = -x + 5 + 6$$

$$y = -x + 11$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ en el punto $P(5, 6)$, es $y = -x + 11$.

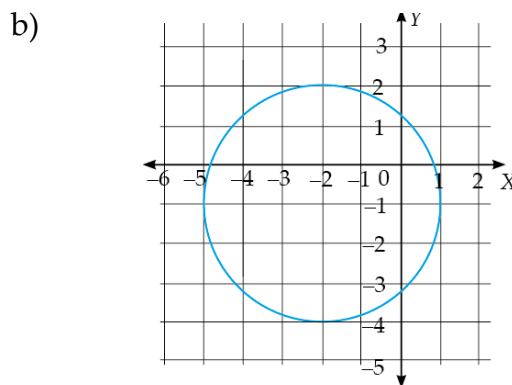
Evaluación formativa 3.1

- Determina lo que se te pide a partir de la información dada en la siguiente circunferencia.



Centro:

Radio:



Centro:

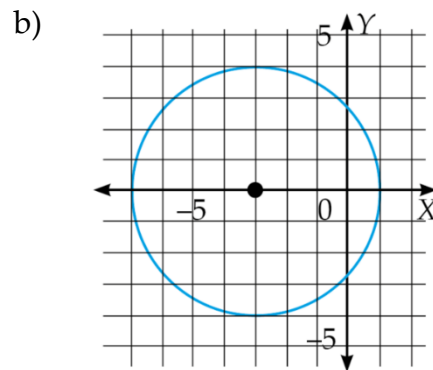
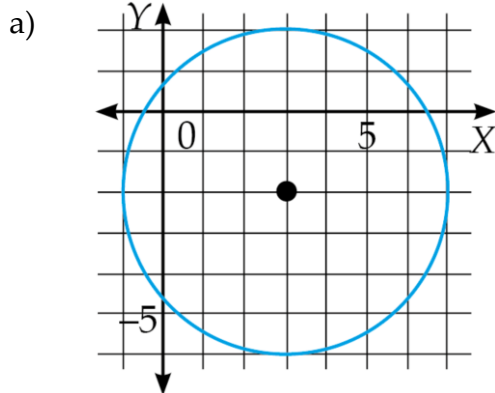
Radio:

- Determina y grafica la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el origen y:
 - Radio igual a $1/3$.
 - Diámetro igual a 10.
 - Pasa por $(-5, 6)$.
 - El diámetro tiene como puntos en sus extremos a $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.

3. Determina y grafica la ecuación ordinaria de la circunferencia dadas las siguientes condiciones:

- El centro es $C(-2, -6)$ y el radio es $r = \sqrt{5}$.
- El centro es $C(-4, -1)$ y pasa por el punto $P(1, 2)$.
- El diámetro tiene como coordenadas en los puntos extremos $A(5, 8)$ y $B(-3, -6)$.

4. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia que corresponde a cada una de las siguientes gráficas.



5. Determina la ecuación general de la circunferencia a partir de las siguientes ecuaciones ordinarias.

- $x^2 + y^2 = 81$
- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$
- $x^2 + (y + 2)^2 = 16$
- $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$

6. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia a partir de su ecuación general.

- $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$
- $x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$
- $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$
- $3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 18 = 0$

7. Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia dada en el punto A.

- $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$; $A(6, -3)$
- $x^2 + y^2 + 2x - 16 = 0$; $A(0, 4)$

Autoevaluación y coevaluación 3.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 3. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Determiné la ecuación de la recta tangente a una circunferencia. (M1-C1)			
Utilicé aplicaciones digitales (como Desmos) para visualizar el efecto de los parámetros h , k y r en la gráfica de la circunferencia. (M1-C2)			
Justifiqué la elección de una ecuación (forma ordinaria o general) según los datos disponibles (centro y radio, punto y tangente, extremos del diámetro, etc.). (M1-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

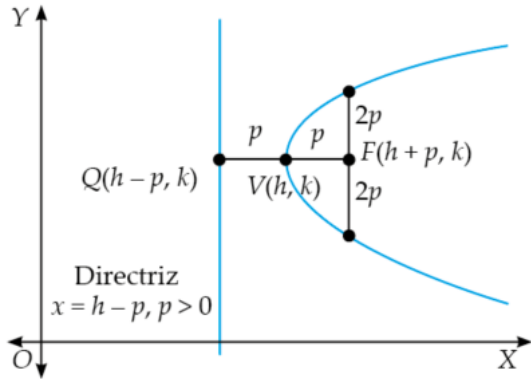
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 3 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con sus compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Determinó la ecuación de la recta tangente a una circunferencia. (M1-C1)			

Utilizó aplicaciones digitales (como Desmos) para visualizar el efecto de los parámetros h , k y r en la gráfica de la circunferencia. (M1-C2)			
Justificó la elección de una ecuación (forma ordinaria o general) según los datos disponibles (centro y radio, punto y tangente, extremos del diámetro, etc.). (M1-C3)			

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 4. La parábola



Eje de simetría paralelo al eje X

$$(y - k)^2 = 4p(x - h), \text{ donde } p > 0$$

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde $D = -4p$, $E = -2k$ y $F = k^2 + 4ph$

Progresión de aprendizaje 4

Evalúa el impacto de los cambios en los parámetros de la ecuación de la parábola en su forma y posición, y diseña aplicaciones prácticas que utilicen las propiedades únicas de la parábola en contextos de ingeniería o física.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 4.1

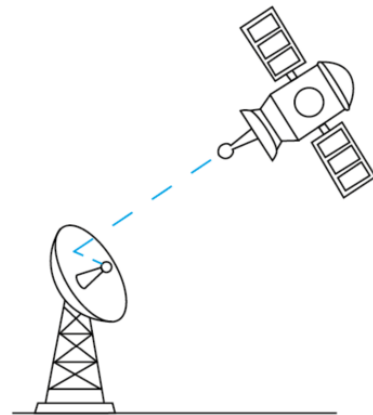
Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

6. ¿Cuál es el resultado de desarrollar el binomio al cuadrado $(3x + 4)^2$?
b) $9x^2 + 12x + 16$ b) $9x^2 + 24x + 16$ c) $6x^2 + 24x + 8$
7. ¿Cuál es la factorización del trinomio cuadrado perfecto $16x^2 - 40x + 25$?
b) $(4x - 5)^2$ b) $(8x - 5)^2$ c) $\left(4x - \frac{5}{2}\right)^2$
8. Dada la expresión $x^2 - 14x$, ¿cuál es el término que completa el trinomio cuadrado perfecto?
b) 196 b) -7 c) 49

Elementos de la parábola

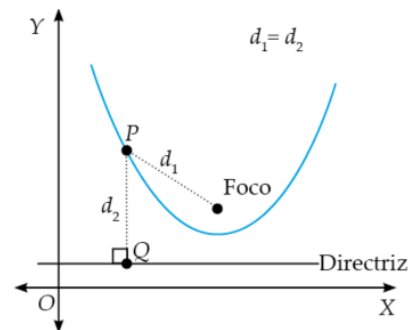
Una empresa de telecomunicaciones quiere diseñar una antena para captar señales de un satélite. El diseño debe garantizar que todas las señales que llegan en línea recta al plato parabólico reboten y se concentren en un único punto, donde se coloca el receptor. El ingeniero a cargo explica que la forma parabólica es ideal para este propósito, porque tiene una propiedad geométrica muy especial.

Para que el diseño sea eficiente, es necesario entender qué condiciones debe cumplir la curva del plato reflector, como se muestra en la figura de la derecha.



¿Qué propiedad geométrica debe cumplir una antena para que todas las ondas que inciden sobre su superficie se reflejen hacia el receptor fijo?

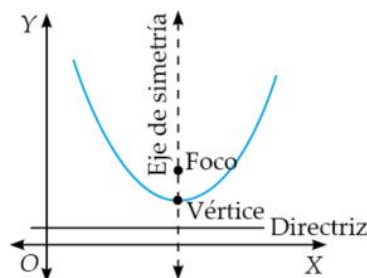
Una **parábola**, como se ilustra en la figura de la derecha, es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo, llamado **foco** que se denota como F , y de una recta fija, llamada **directriz**. Sea P un punto ubicado sobre la parábola y Q un punto sobre la directriz, de tal forma que el segmento $\overline{PQ}$ es perpendicular a la directriz. Los puntos P , Q y el foco deben satisfacer que la distancia d_1 sea igual a d_2 .



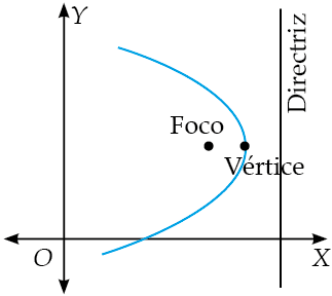
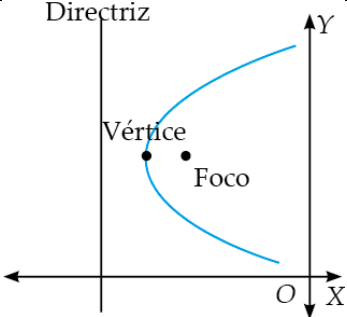
En una parábola, el **eje de simetría** o **eje focal**, es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. El eje de simetría se usa para identificar si una parábola es vertical o horizontal. Si el eje de simetría es paralelo al eje X , la parábola es horizontal. Si es paralelo al eje Y , entonces la parábola es vertical, como se muestra en las siguientes figuras.

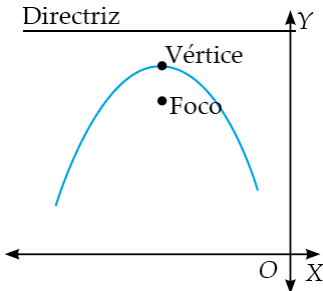
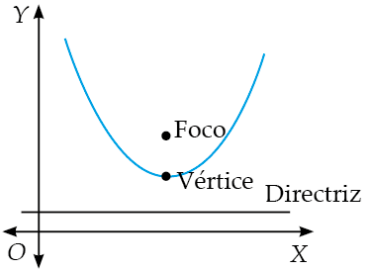
Parábola horizontal con eje de simetría paralelo al eje X	Parábola vertical con eje de simetría paralelo al eje Y

El **vértice** de la parábola, que se representa con la letra V , es el punto de la curva donde esta se interseca con el eje de simetría, como se muestra en la figura de la derecha.



Como ya sabes, hay parábolas horizontales y verticales. Las parábolas verticales abren hacia arriba o hacia abajo. Las parábolas horizontales abren hacia la derecha o hacia la izquierda. Para identificar hacia donde abre una parábola, debes conocer el valor de la distancia dirigida del vértice al foco, que se denota como p , como se muestra a continuación.

Parábolas horizontales	
Si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.	Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha.
	

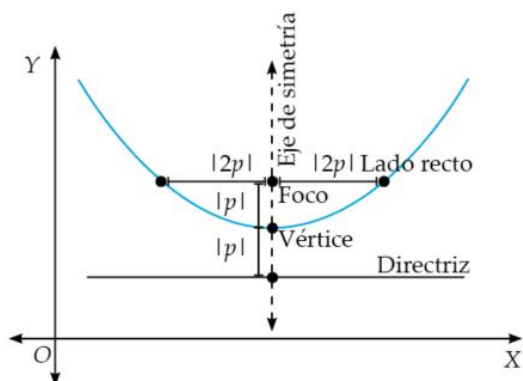
Parábolas verticales	
Si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.	Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba.
	

La distancia dirigida incorpora la noción de dirección u orientación entre sus puntos. Esto significa que se toma en cuenta la diferencia de posiciones entre los puntos a lo largo de los ejes X y Y , respetando el orden en que se presentan las coordenadas, como se muestra en el video del código QR 4.1.



QR 4.1. Distancia dirigida. Video MatCódigo.
Fuente: Parzibyte, 2025.

La distancia no dirigida (distancia) del vértice al foco es $|p|$, y la distancia del vértice a la directriz también es $|p|$. Además, el **lado recto**, que se representa con las siglas lr , es la longitud del segmento que



pasas por el foco y es paralelo a la directriz. Los extremos del lado recto se encuentran sobre la parábola, como se muestra en la figura de la izquierda. Observa que su longitud es $|4p|$, y se denota como, $lr = |4p|$.

Ecuación ordinaria de la parábola

Una parábola es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidista de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.

Parábola horizontal con vértice en el origen

La representación gráfica de una parábola horizontal con vértice en el origen puede abrir hacia la izquierda o hacia la derecha, según el valor de p , que es la distancia dirigida del vértice al foco, como se observa en las siguientes figuras.

	Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha. Eje de simetría está sobre el eje X Vértice en el origen $V(0, 0)$ Foco en $F(p, 0)$ Directriz, la recta vertical con ecuación $x = -p$ El punto D tiene coordenadas $(-p, y)$
	Si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda. Eje de simetría está sobre el eje X Vértice en el origen $V(0, 0)$ Foco en $F(p, 0)$ Directriz, la recta vertical con ecuación $x = -p$ El punto D tiene coordenadas $(-p, y)$

Para deducir la forma de la ecuación ordinaria de la parábola horizontal con vértice en el origen, sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la parábola, que satisface la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir

$$|\overline{FP}| = |\overline{DP}|$$

Estas distancias están dadas por

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

$$|\overline{DP}| = \sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(x + p)^2} = |x + p|$$

Luego, igualándolas se tiene que

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Eleva al cuadrado en ambos lados $(\sqrt{(x - p)^2 + y^2})^2 = |x + p|^2$

Desarrolla los binomios $(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$, dado que $|a|^2 = a^2$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Simplifica

$$-2px + y^2 = 2px$$

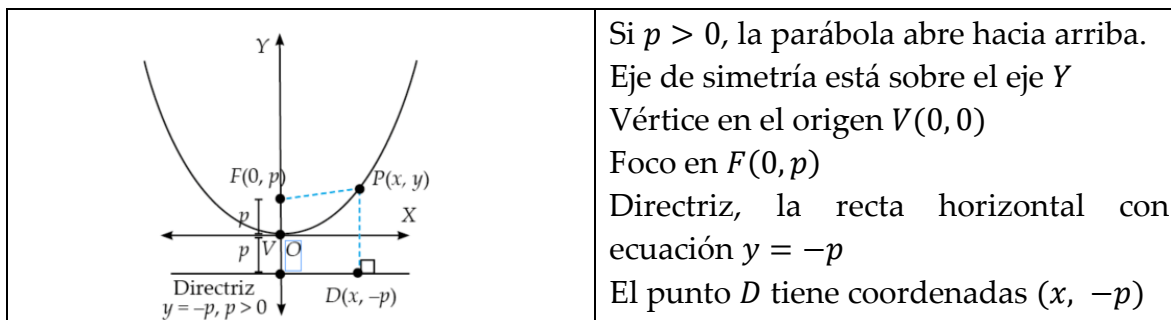
Despeja y^2

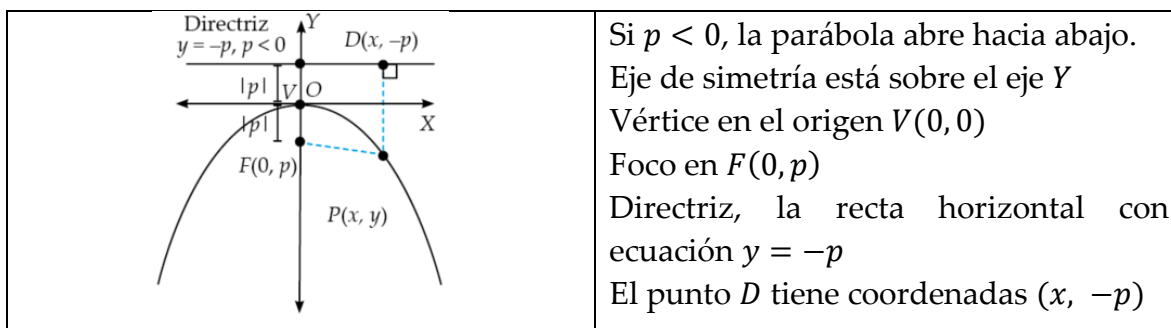
$$y^2 = 4px$$

La ecuación ordinaria $y^2 = 4px$, representa a una **parábola horizontal con vértice en el origen**. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha y en el caso de que $p < 0$, esta abre hacia la izquierda.

Parábola vertical con vértice en el origen

La representación gráfica de una parábola vertical con vértice en el origen puede abrir hacia abajo o hacia arriba, según el valor de p , que es la distancia dirigida del vértice al foco, como se observa en las siguientes figuras.





Para deducir la forma de la ecuación ordinaria de la parábola vertical con vértice en el origen, sea $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la parábola, que satisface la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir

$$|\overline{FP}| = |\overline{DP}|$$

Estas distancias están dadas por

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

$$|\overline{DP}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} = \sqrt{(y + p)^2} = |y + p|$$

Luego, igualándolas se tiene que

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Eleva al cuadrado en ambos lados $(\sqrt{x^2 + (y - p)^2})^2 = |y + p|^2$

Desarrolla los binomios $x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$, dado que $|a|^2 = a^2$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Simplifica $x^2 - 2py = 2py$

Despeja x^2 $x^2 = 4py$

La ecuación ordinaria $x^2 = 4py$, representa a una **parábola vertical con vértice en el origen**. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y en el caso de que $p < 0$, esta abre hacia abajo.

Propiedades de las ecuaciones ordinarias de la parábola con $V(0, 0)$.

Ecuación	Vértice	Foco	Directriz	Dirección de la parábola
$y^2 = 4px$	$V(0, 0)$	$F(p, 0)$	$x = -p$	Si $p > 0$, abre a la derecha
				Si $p < 0$, abre a la izquierda
$x^2 = 4py$	$V(0, 0)$	$F(0, p)$	$y = -p$	Si $p > 0$, abre hacia arriba
				Si $p < 0$, abre hacia abajo

Para representar en el plano cartesiano una parábola en su forma gráfica, conociendo únicamente su ecuación ordinaria con vértice en el origen, debes identificar sus elementos clave como el vértice, el foco, la ecuación de la directriz, el eje de simetría, las coordenadas de los extremos del lado recto, así como la dirección de apertura (valor de p). A partir de estos datos, es posible graficarla como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo formativo 4.1

1. Grafica las siguientes ecuaciones de la parábola.

a) $y^2 = 8x$

b) $x^2 = -4y$

Resolución

a) $y^2 = 8x$

Vértice: $V(0, 0)$

El término cuadrático es y^2 , así que el eje de simetría está sobre el eje X , por lo que es una parábola horizontal.

De $y^2 = 8x$, se tiene que $4p = 8 \rightarrow p = \frac{8}{4} = 2$. Esto implica que $p > 0$, por lo que la parábola abre hacia la derecha.

La longitud del lado recto es $|4p| = |8| = 8$,

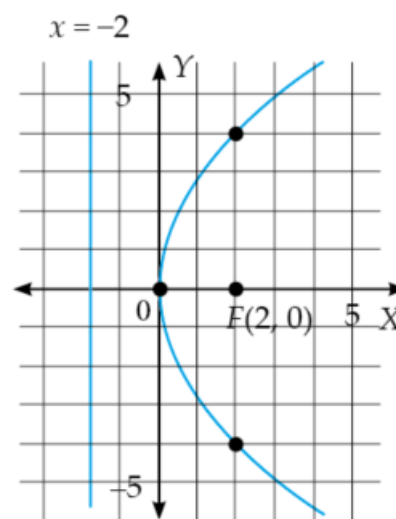
Dado que $p = 2$, el foco se localiza 2 unidades a la izquierda del vértice, $V(0, 0)$: $F(2, 0)$.

La directriz es la recta vertical que se ubica 2 unidades a la izquierda del vértice, su ecuación es: $x = -2$.

El lado recto es un segmento vertical que pasa por el foco, $F(2, 0)$. Dado que $lr = 8$, del foco desplázate 4 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia abajo. Así, las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son: $(2, -4)$ y $(2, 4)$.

Resumen de $y^2 = 8x$: parábola horizontal que abre hacia la derecha, $V(0, 0)$, $F(2, 0)$, ecuación de la directriz $x = -2$, coordenadas de los puntos extremos del lado recto $(2, -4)$ y $(2, 4)$.

La gráfica de $y^2 = 8x$ se muestra a la derecha.



b) $x^2 = -4y$

Vértice: $V(0, 0)$

El término cuadrático es x^2 , así que el eje de simetría está sobre el eje Y , por lo que es una parábola vertical.

De $x^2 = -4y$, se tiene que $4p = -4 \rightarrow p = \frac{-4}{4} = -1$. Esto implica que $p < 0$, por lo tanto, la parábola abre hacia abajo.

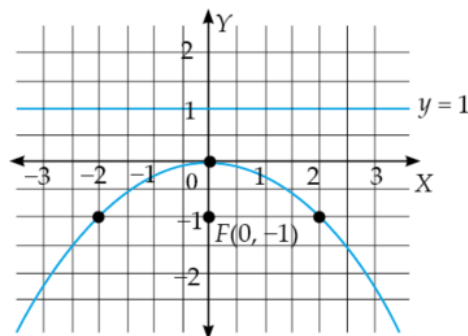
La longitud del lado recto es $|4p| = |-4| = 4$.

Dado que $p = -1$, el foco se localiza una unidad hacia abajo del vértice, $V(0, 0)$: $F(0, -1)$.

La directriz es la recta horizontal que se ubica una unidad hacia arriba del vértice, su ecuación es: $y = 1$.

El lado recto es un segmento horizontal que pasa por el foco, $F(0, -1)$. Dado que $lr = 4$, del foco desplázate 2 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia la izquierda. Así, las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son: $(-2, -1)$ y $(2, -1)$.

Resumen de $x^2 = -4y$: parábola vertical que abre hacia abajo, $V(0, 0)$, $F(0, -1)$, ecuación de la directriz $y = 1$, coordenadas de los puntos extremos del lado recto $(-2, -1)$ y $(2, -1)$.



La gráfica de $x^2 = -4y$ se muestra a la derecha.

Cuando se conoce el vértice de la parábola y las coordenadas del foco, es posible determinar su ecuación ordinaria. Para ello, identifica si la parábola es vertical u horizontal. Si el foco se encuentra sobre el eje Y , la parábola es vertical y su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$; si está sobre el eje X , la parábola es horizontal y su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$. Para conocer p , calcula la distancia dirigida del vértice al foco.

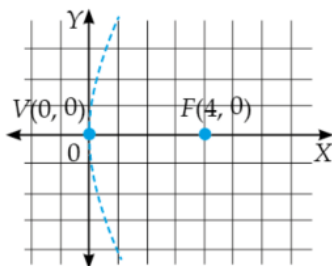
Ejemplo formativo 4.2

1. Determina la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen y foco en $(4, 0)$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación de la parábola.

Ubica en el plano cartesiano las coordenadas del vértice $V(0, 0)$ y del foco $F(4, 0)$.



Observa en la gráfica de la izquierda que el foco está sobre el eje X , por lo que la parábola es horizontal y su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$.

Calcula el valor de p .

La distancia dirigida del vértice al foco es 4, en consecuencia $p = 4$.

Determina la ecuación ordinaria de la parábola.

Sustituye $p = 4$ en la ecuación $y^2 = 4px$, para obtener

$$y^2 = 4(4)x \rightarrow y^2 = 16x$$

La ecuación ordinaria de la parábola es $y^2 = 16x$.

Cuando se conocen las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz, es posible determinar la ecuación ordinaria de la parábola. Para ello, identifica si la parábola es vertical o horizontal. Si el foco se encuentra sobre el eje Y , la parábola es vertical y su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$; si está sobre el eje X , la parábola es horizontal y su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$.

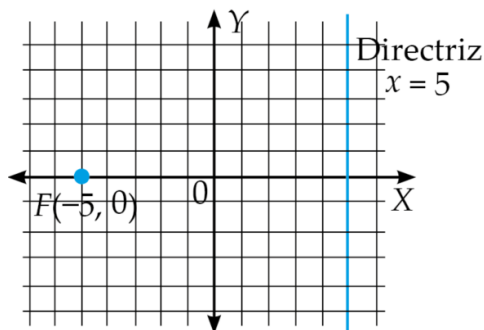
Para determinar p , grafica el foco y la ecuación de la directriz, observa que el vértice se ubica exactamente en el punto medio entre ellos. Luego, calcula la distancia dirigida vértice al foco, que es p .

Ejemplo formativo 4.3

1. Obtén la ecuación ordinaria de la parábola que tiene foco en $F(-5, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x - 5 = 0$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación de la parábola.



Grafica la ecuación de la directriz $x = 5$ y ubica el foco $F(-5, 0)$.

Dado que el foco está sobre el eje X , la parábola es horizontal y su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$.

Calcula el valor de p .

El vértice se localiza en el punto medio entre el foco y la directriz, es decir, $V(0, 0)$. Luego,

la distancia dirigida del vértice al foco es $p = -5$.

Determina la ecuación ordinaria de la parábola.

Sustituye $p = -5$ en la ecuación $y^2 = 4px$, para obtener

$$y^2 = 4(-5)x \rightarrow y^2 = -20x$$

La ecuación ordinaria de la parábola es $y^2 = -20x$.

Si se conoce el eje focal, el vértice y un punto sobre la parábola, es posible determinar la ecuación ordinaria de la parábola. Si el eje focal coincide con el eje Y , la parábola es vertical y su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$; si coincide con el eje X , la parábola es horizontal y su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$. Para determinar p ,

sustituye las coordenadas del punto conocido en la respectiva ecuación de la parábola.

Ejemplo formativo 4.4

1. Determina la ecuación ordinaria de la parábola cuyo eje focal coincide con el eje Y , tiene vértice en el origen y pasa por el punto $A(2, 3)$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación de la parábola.

Dado que el eje focal coincide con el eje Y , la parábola es vertical y la ecuación es de la forma $x^2 = 4py$.

Calcula el valor de p .

Del punto $A(2, 3)$, $x = 2, y = 3$. Sustitúyelos en la ecuación $x^2 = 4py$.

$$2^2 = 4p(3) \rightarrow 4 = 12p \rightarrow p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Determina la ecuación ordinaria de la parábola.

Sustituye el valor de $p = \frac{1}{3}$ en $x^2 = 4py$.

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)y \rightarrow x^2 = \frac{4}{3}y$$

La ecuación ordinaria de la parábola es $x^2 = \frac{4}{3}y$.

Parábola con vértice fuera del origen

No todas las parábolas tienen su vértice en el origen. Las parábolas con vértice fuera del origen tienen por ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \text{ parábola vertical}$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h), \text{ parábola horizontal}$$

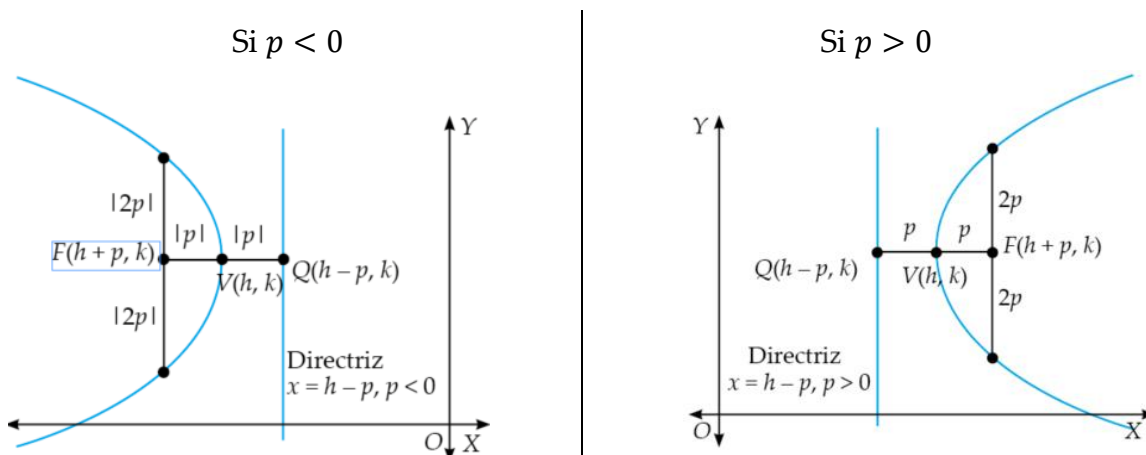
El punto $V(h, k)$ es el vértice de la parábola y p es la distancia dirigida del vértice al foco.

Propiedades de la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el punto $V(h, k)$.

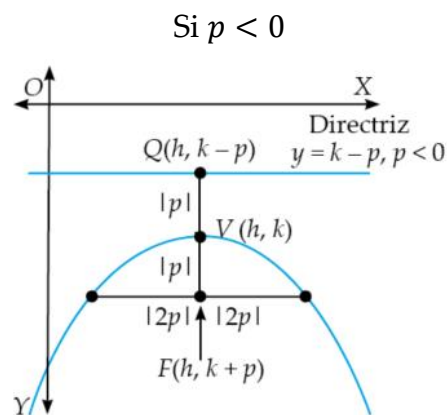
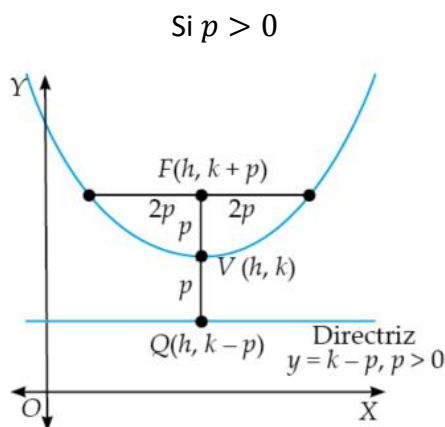
Ecuación	Vértice	Foco	Directriz	Dirección de la parábola
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$V(h, k)$	$F(h + p, k)$	$x = h - p$	$p > 0$, abre hacia la derecha
				$p < 0$, abre hacia la izquierda
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	$V(h, k)$	$F(h, k + p)$	$y = k - p$	$p > 0$, abre hacia arriba
				$p < 0$, abre hacia abajo

La **representación gráfica de una parábola**, como se muestra en las siguientes gráficas, depende de si su eje de simetría es paralelo al eje X o al eje Y . Así como del valor de p , que indica la distancia dirigida del vértice al foco.

Una **parábola horizontal** tiene eje de simetría paralelo al eje X y su ecuación ordinaria es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. Si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda; si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha, como se muestra en las siguientes figuras.



Una **parábola vertical** tiene eje de simetría paralelo al eje Y y su ecuación ordinaria es de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo; si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba, como se muestra en las siguientes figuras.



El análisis de la ecuación ordinaria de la parábola permite comprender cómo el valor de p y la orientación del eje de simetría determinan la forma de la parábola. Para visualizar estos efectos de manera interactiva, utiliza Desmos, como se muestra en las Figuras 4.1 y 4.2, para explorar el efecto de las constantes h , k y p en la gráfica de una parábola. Observa que el valor de h origina un desplazamiento horizontal: hacia la derecha o hacia la izquierda. La constante k determina un desplazamiento vertical: hacia arriba o hacia abajo. El signo de p determina la orientación de la parábola y su valor absoluto influye en su apertura: cuanto mayor sea más abierta es la curva; cuanto menor sea la curva es más cerrada.

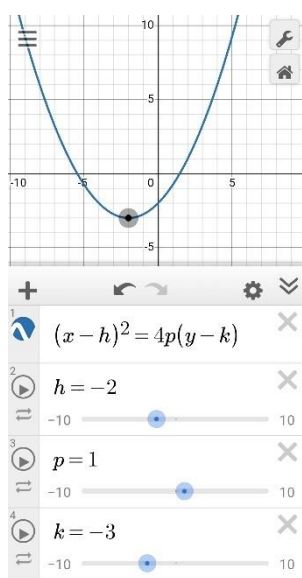


Figura 4.1. Efectos de las constantes h , k y p en la gráfica de la parábola vertical.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

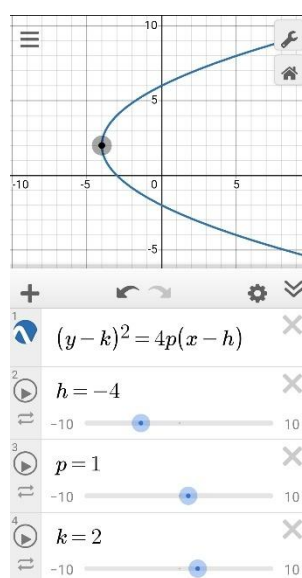


Figura 4.2. Efectos de las constantes h , k y p en la gráfica de la parábola horizontal.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Ejemplo formativo 4.5

1. Determina los elementos de la parábola $(x + 3)^2 = -8(y - 1)$ y gráficala.

Resolución

De la ecuación $(x + 3)^2 = -8(y - 1)$: $h = -3$ y $k = 1$

Vértice: $V(-3, 1)$

Valor de p : $4p = -8 \rightarrow p = -2$

La variable x está en el binomio al cuadrado $(x + 3)^2$, por lo que es una parábola vertical.

Dado que $p < 0$, indica que la parábola abre hacia abajo.

El foco está dos unidades abajo del vértice: $F(h, k + p) \rightarrow F(-3, -1)$

La ecuación de la directriz es: $y = k - p = 1 - (-2) = 3$

En este caso, el segmento del lado recto es horizontal y pasa por el foco, $F(-3, -1)$, de donde la ordenada es $y = -1$. Sustitúyela en la ecuación $(x + 3)^2 = -8(y - 1)$ y determina las coordenadas de los puntos extremos el lado recto.

$$(x + 3)^2 = -8(-1 - 1)$$

$$(x + 3)^2 = 16$$

$$\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{16}$$

$$|x + 3| = 4$$

Aplicando el valor absoluto:

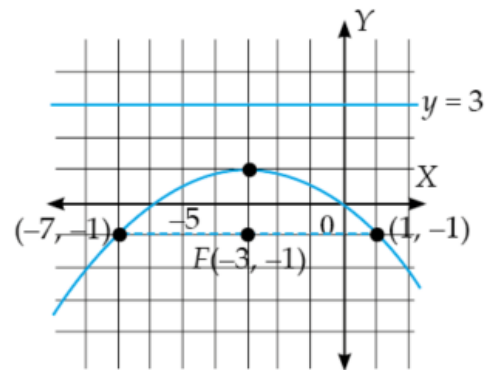
$$-(x + 3) = 4 \quad \text{o} \quad x + 3 = 4$$

$$-x - 3 = 4 \quad \text{o} \quad x = 4 - 3$$

$$-x = 4 + 3 \quad \text{o} \quad x = 1$$

$$-x = 7 \quad \text{o} \quad x = 1$$

$$x = -7 \quad \text{o} \quad x = 1$$



Con base en lo anterior, los puntos extremos del lado recto son: $A(-7, -1)$ y $B(1, -1)$. La gráfica de la parábola se muestra a la derecha.

Si conoces las coordenadas del foco y del vértice, a partir de estos elementos puedes determinar la ecuación ordinaria de la parábola.

Ejemplo formativo 4.6

1. Determina la ecuación ordinaria de la parábola con vértice $V(0, 2)$ y foco $F(0, 5)$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación ordinaria de la parábola.

Del vértice $V(0, 2)$: $h = 0$ y $k = 2$.

Dado que la abscisa del vértice $V(0, 2)$ y del foco $F(0, 5)$ son iguales, es decir $x = 0$, esto indica que el eje focal es paralelo al eje Y , así que la parábola es vertical y su ecuación es de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

Calcula el valor de p .

La distancia dirigida del vértice al foco es $p = 5 - 2 = 3$.

Determina la ecuación ordinaria de la parábola.

La ecuación ordinaria de la parábola es de la forma

$$\begin{aligned}(x - h)^2 &= 4p(y - k) \\ (x - 0)^2 &= 4(3)(y - 2) \\ x^2 &= 12(y - 2)\end{aligned}$$

La ecuación ordinaria de la parábola es $x^2 = 12(y - 2)$.

Si conoces las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz, a partir de estos elementos puedes determinar la ecuación ordinaria de la parábola.

Ejemplo formativo 4.7

1. Determina la ecuación ordinaria de la parábola con foco $F(5, -1)$ y ecuación de la directriz $x = 16$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación ordinaria de la parábola.

La directriz es vertical, así que la parábola es horizontal.

La ecuación ordinaria de la parábola es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Calcula el valor de p .

El vértice es el punto medio entre el foco $F(5, -1)$ y el punto $B(16, -1)$ que es la intersección de la directriz con el eje de simetría.

$$h = \frac{5 + 16}{2} = 10.5 \quad y \quad k = \frac{-1 - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por lo que el vértice es $V(10.5, -1)$.

La distancia dirigida del vértice al foco es $p = 5 - 10.5 = -5.5$.

Determina la ecuación ordinaria de la parábola.

Sustituye $h = 10.5$, $k = -1$ y $p = -5.5$ en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}(y - k)^2 &= 4p(x - h) \\ (y - (-1))^2 &= 4(-5.5)(x - 10.5) \\ (y + 1)^2 &= -22(x - 10.5)\end{aligned}$$

La ecuación ordinaria de la parábola es $(y + 1)^2 = -22(x - 10.5)$.

Ecuación general de la parábola

Recuerda que las ecuaciones ordinarias de la parábola con vértice $V(h, k)$, son:

- $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. El eje de simetría es paralelo al eje X .
- $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. El eje de simetría es paralelo al eje Y .

A continuación, transformaremos cada ecuación ordinaria de la parábola en su correspondiente ecuación general. Para ello, del lado izquierdo desarrollaremos el binomio al cuadrado, del lado derecho realizaremos la multiplicación indicada, igualamos a cero y reordenaremos el lado izquierdo.

Deducción de la ecuación general de una parábola horizontal a partir de su ecuación ordinaria con vértice fuera del origen:

$$\begin{aligned}(y - k)^2 &= 4p(x - h) \\ y^2 - 2ky + k^2 &= 4px - 4ph \\ y^2 - 2ky + k^2 - 4px + 4ph &= 0 \\ y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph &= 0\end{aligned}$$

Haciendo $D = -4p$, $E = -2k$ y $F = k^2 + 4ph$, obtenemos la ecuación general de la parábola horizontal con vértice fuera del origen

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A continuación, deduciremos la ecuación general de una parábola vertical a partir de su ecuación ordinaria con vértice fuera del origen:

$$\begin{aligned}(x - h)^2 &= 4p(y - k) \\ x^2 - 2hx + h^2 &= 4py - 4pk \\ x^2 - 2hx + h^2 - 4py + 4pk &= 0 \\ x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk &= 0\end{aligned}$$

Haciendo $D = -2h$, $E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$, obtenemos la ecuación general de la parábola vertical con vértice fuera del origen

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

De los resultados anteriores, las ecuaciones generales de parábola son:

- $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, parábola con eje de simetría horizontal, abre hacia la derecha o hacia la izquierda.
- $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, parábola con eje de simetría vertical, abre hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo formativo 4.8

1. Transforma la ecuación ordinaria $(x - 3)^2 = -4(y - 1)$ en la forma general.

Resolución

Parte de la ecuación ordinaria $(x - 3)^2 = -4(y - 1)$.

$$(x - 3)^2 = -4(y - 1)$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + 9 &= -4y + 4 \\
 x^2 - 6x + 9 + 4y - 4 &= 0 \\
 x^2 - 6x + 4y + 5 &= 0
 \end{aligned}$$

La ecuación general es $x^2 - 6x + 4y + 5 = 0$.

Así cómo es posible transformar una ecuación ordinaria de la parábola en su forma general, también es posible realizar el proceso inverso. A partir de una ecuación general que representa a una parábola, podemos obtener su forma ordinaria mediante técnicas algebraicas: haciendo algunas sustituciones, trasponiendo términos, completando el trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo y factorizando el lado derecho. Este procedimiento permite identificar elementos como el vértice, el valor del parámetro p , el eje de simetría y la orientación de la parábola.

Transformación de la ecuación general de la parábola horizontal en su ecuación ordinaria.

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Haciendo $D = -4p$, $E = -2k$ y $F = k^2 + 4ph$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 y^2 + (-4p)x + (-2k)y + k^2 + 4ph &= 0 \\
 y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph &= 0 \\
 y^2 - 2ky &= 4px - k^2 - 4ph \\
 y^2 - 2ky + \left(\frac{2k}{2}\right)^2 &= 4px - k^2 - 4ph + \left(\frac{2k}{2}\right)^2 \\
 y^2 - 2ky + k^2 &= 4px - k^2 - 4ph + k^2 \\
 (y - k)^2 &= 4px - 4ph \\
 (y - k)^2 &= 4p(x - h)
 \end{aligned}$$

Transformación de la ecuación general de la parábola vertical en su ecuación ordinaria.

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Haciendo $D = -2h$, $E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 x^2 + (-2h)x + (-4p)y + h^2 + 4pk &= 0 \\
 x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk &= 0 \\
 x^2 - 2hx &= 4py - h^2 - 4pk \\
 x^2 - 2hx + \left(\frac{2h}{2}\right)^2 &= 4py - h^2 - 4pk + \left(\frac{2h}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2hx + h^2 &= 4py - h^2 - 4pk + h^2 \\
 (x - h)^2 &= 4py - 4pk \\
 (x - h)^2 &= 4p(y - k)
 \end{aligned}$$

Ejemplo formativo 4.9

1. Transforma la ecuación $2y^2 - 16x + 20y + 82 = 0$ en su forma ordinaria.

Resolución

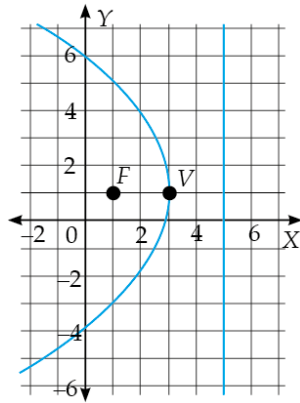
$$\begin{aligned}
 2y^2 - 16x + 20y + 82 &= 0 \\
 2(y^2 - 8x + 10y + 41) &= 0 \\
 y^2 - 8x + 10y + 41 &= 0 \\
 y^2 + 10y &= 8x - 41 \\
 y^2 + 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 &= 8x - 41 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \\
 y^2 + 10y + 5^2 &= 8x - 41 + 25 \\
 (y + 5)^2 &= 8x - 16 \\
 (y + 5)^2 &= 8(x - 2)
 \end{aligned}$$

La ecuación ordinaria de la parábola es $(y + 5)^2 = 8(x - 2)$.

Evaluación formativa 4.1

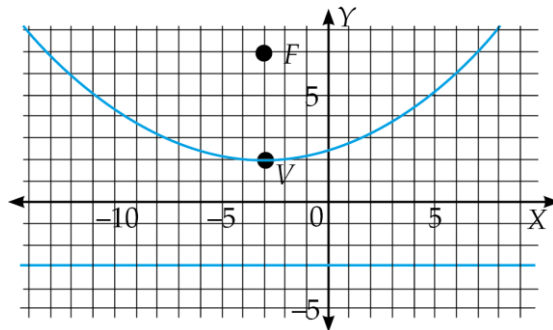
- Determina lo que se te pide a partir de la información dada en las siguientes gráficas.

a)



Es una parábola _____
que abre hacia _____
Vértice: _____
Foco: _____
Ecuación de la directriz: _____
 $p =$ _____
 $lr =$ _____
Eje de simetría o eje focal es paralelo al eje _____

b)



Es una parábola _____
que abre hacia _____
Vértice: _____
Foco: _____
Ecuación de la directriz: _____
 $p =$ _____
 $lr =$ _____
Eje de simetría o eje focal es paralelo al eje _____

- Grafica y determina los elementos de cada una de las siguientes parábolas.
 - $y^2 = -4x$
 - $24x = 8y^2$
 - $3x^2 + 8y = 0$
 - $x^2 = 16y$
- Determina la ecuación ordinaria de la parábola si se sabe que:
 - $V(0, 0)$, foco $F(-5, 0)$
 - $V(0, 0)$, foco $F(0, -1/2)$
 - $V(0, 0)$, ecuación de la directriz $y + 2 = 0$.
 - $V(0, 0)$, ecuación de la directriz $2x = -3$.
 - Foco $(\frac{4}{3}, 0)$, ecuación de la directriz $3x + 4 = 0$.
 - Vértice en el origen, su eje focal coincide con el eje X y pasa por $(-2, 6)$.
 - Vértice en el origen, foco sobre el eje Y y pasa por $(-2, -\frac{3}{4})$.
- Determina la ecuación ordinaria de la parábola cuyo vértice es $(-5, 2)$ y foco $(-5, 5)$.
- El foco de una parábola es el punto $(-2, 6)$ y su directriz $x = 10$. Halla su ecuación ordinaria.

6. Determina la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el punto $(1, -3)$ y directriz $y + 1 = 0$.
7. Transforma cada una de las siguientes ecuaciones ordinarias en su forma general.
- a) $(y - 3)^2 = 8(x - 1)$ b) $(x + 6)^2 = -3(y + 1)$
c) $(y - 5)^2 = -12(x + 4)$ d) $(x + 4)^2 = 16(y - 7)$
8. Transforma cada una de las siguientes ecuaciones generales de la parábola en su forma ordinaria.
- a) $y^2 - 10y + 12x + 13 = 0$ b) $3y^2 + 6y - 4x + 15 = 0$
c) $x^2 + 8x - 6y + 28 = 0$ d) $4x^2 - 4x + 16y + 25 = 0$

Autoevaluación y coevaluación 4.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 4. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Determiné la ecuación de la parábola a partir de elementos geométricos como vértice, foco y directriz. (M1-C1)			
Utilicé herramientas gráficas como Desmos para explorar cómo influyen los parámetros h , k y p en la forma de la parábola. (M1-C2)			
Elegí adecuadamente entre la forma ordinaria o general de la parábola, según los datos disponibles del problema. (M1-C3)			
Comparé de forma clara y argumentada su procedimiento al transformar entre ecuaciones ordinarias y generales de parábolas. (M2-C4)			

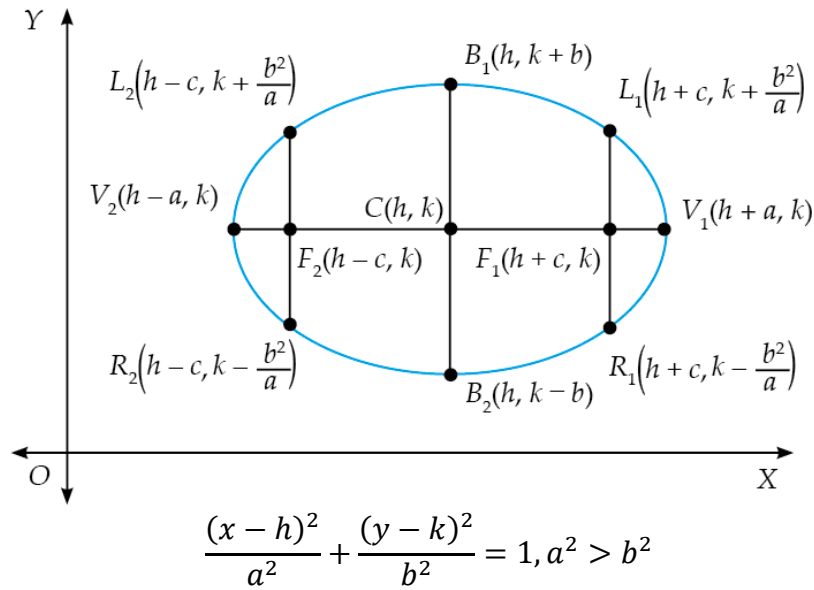
Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 4 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con sus compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Determinó la ecuación de la parábola a partir de elementos geométricos como vértice, foco y directriz. (M1-C1)			
Utilizó herramientas gráficas como Desmos para explorar cómo influyen los parámetros h , k y p en la forma de la parábola. (M1-C2)			
Eligió adecuadamente entre la forma ordinaria o general de la parábola, según los datos disponibles del problema. (M1-C3)			
Comparó de forma clara y argumentada su procedimiento al transformar entre ecuaciones ordinarias y generales de parábolas. (M2-C4)			

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 5. La elipse



$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ donde } A > 0, B > 0 \text{ y } A \neq B$$

$$A = b^2; C = a^2; D = -2b^2h; E = -2a^2k; F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$$

Progresión de aprendizaje 5

Analiza las relaciones entre las propiedades geométricas y algebraicas de la elipse, y elabora modelos matemáticos que apliquen estas relaciones para resolver problemas en campos como la astronomía o la acústica.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

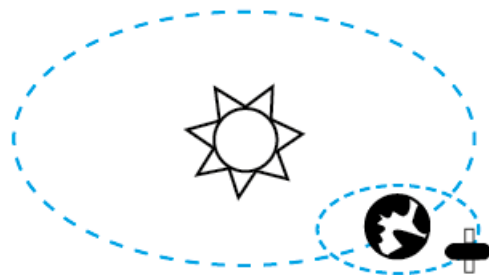
Evaluación diagnóstica 5.1

Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

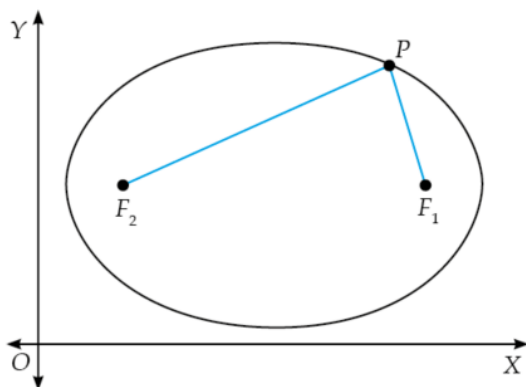
1. ¿Cuál es el resultado de desarrollar el binomio al cuadrado $(2x - 5)^2$?
a) $4x^2 - 20x + 25$ b) $4x^2 - 10x + 10$ c) $2x^2 - 20x + 10$
2. ¿Cuál es la factorización del trinomio cuadrado perfecto $49x^2 + 56x + 16$?
a) $(7x + 8)^2$ b) $(14x + 2)^2$ c) $(7x + 4)^2$
3. ¿Cuál es el término que completa el trinomio cuadrado perfecto en la expresión $x^2 + 10x$?
a) 25 b) 20 c) 100
4. Selecciona la ecuación que representa a la ecuación ordinaria de la circunferencia.
a) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ c) $y = a(x - h)^2 + k$
5. ¿Cuál de las siguientes opciones describe correctamente el lugar geométrico de una parábola?
a) El conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija, llamada directriz.
b) El conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.
c) El conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Elementos de la elipse

Una empresa aeroespacial busca diseñar una trayectoria orbital de un satélite de reconocimiento. Para ello, el equipo de ingeniería debe considerar que las órbitas de los planetas y satélites no son perfectamente circulares, sino que describen trayectorias elípticas. Esta forma geométrica tiene propiedades que permiten determinar posiciones. Para garantizar un diseño eficiente, se requiere comprender las condiciones geométricas que definen a una elipse.



Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es igual a una constante positiva $2a$, como se muestra en la siguiente figura.

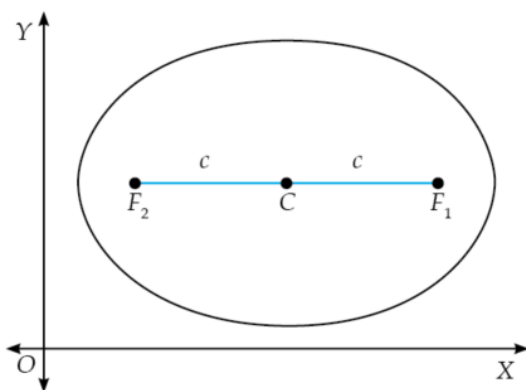


P es un punto sobre la elipse.

F_1 y F_2 se llaman focos de la elipse.

La distancia $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$.

El punto medio del segmento que une los focos es el **centro** de la elipse y la distancia del centro a uno de sus focos es c , como se muestra en la siguiente figura.

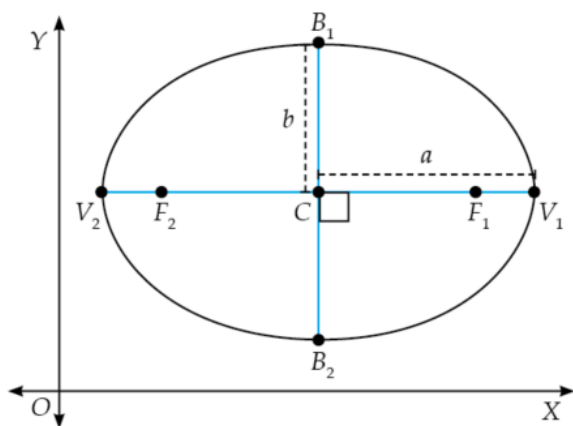


C se llama centro de la elipse.

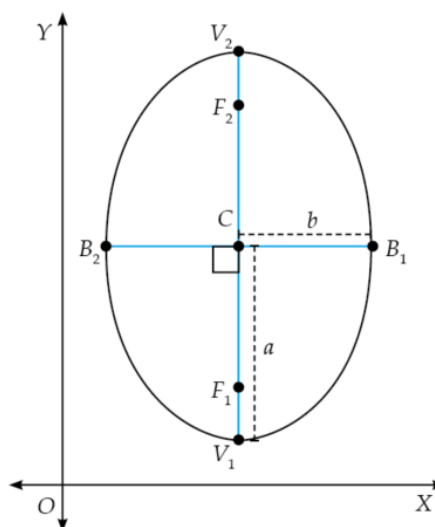
$|\overline{F_1C}| = c$, $|\overline{F_2C}| = c$ y $|\overline{F_1F_2}| = 2c$

Una elipse puede estar orientada de forma horizontal o vertical. Los segmentos perpendiculares que pasan por el centro de una elipse son su eje mayor y su eje menor, como se muestra en la siguiente figura.

Elipse horizontal



Elipse vertical



V_1 y V_2 se llaman vértices de la elipse y son los extremos del eje mayor.

B_1 y B_2 son los extremos del eje menor.

El **eje mayor** es el segmento más largo que une dos puntos extremos de la elipse y pasa por el centro y por ambos focos. Su longitud es igual a $2a$, donde a es la longitud del **semieje mayor** (distancia del centro a uno de sus vértices). Si la elipse es **horizontal**, el eje mayor es **horizontal**. Si la elipse es **vertical**, el eje mayor es **vertical**.

Propiedad del eje mayor $\overline{V_1V_2}$: $|\overline{V_2V_1}| = 2a$.

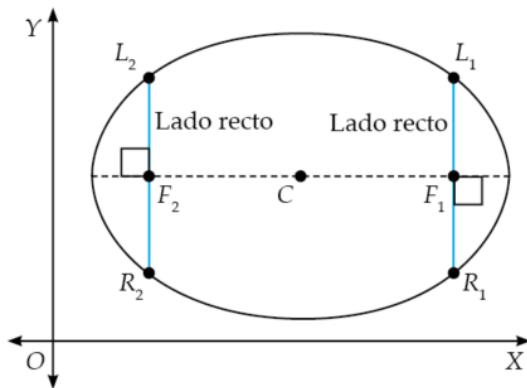
Propiedad del semieje mayor $\overline{V_2C}$ y $\overline{CV_1}$: $|\overline{V_2C}| = a$, $|\overline{CV_1}| = a$.

El **eje menor** es el segmento que une dos puntos de la elipse y es perpendicular al eje mayor en el centro. Su longitud es igual a $2b$, donde b es la longitud del **semieje menor**. Este eje no pasa por los focos, pero sí por el centro de la elipse.

Propiedad del eje menor $\overline{B_1B_2}$: $|\overline{B_2B_1}| = 2b$.

Propiedad del semieje menor $\overline{B_2C}$ y $\overline{CB_1}$: $|\overline{B_2C}| = b$, $|\overline{CB_1}| = b$.

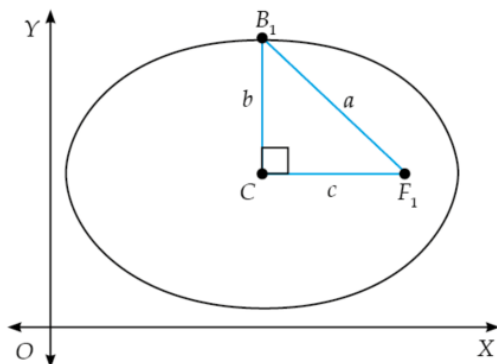
El **lado recto**, lr , de una elipse es el segmento que pasa por uno de los focos, es perpendicular al eje mayor y cuyos extremos están sobre la elipse. Este segmento representa una medida relacionada con la apertura de la curva cerca del foco, como se muestra en la siguiente figura.



La longitud del lado recto, lr , de una elipse, se calcula mediante la fórmula:

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

En la elipse, existe una relación entre las distancias $|\overline{CB_1}|$, $|\overline{B_1F_1}|$ y $|\overline{F_1C}|$, que forman un triángulo rectángulo con vértices B_1 , C y F_1 , como se observa a continuación.



Por el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

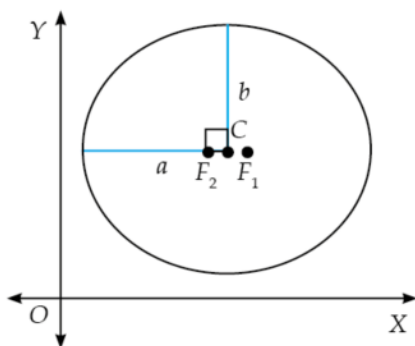
La **excentricidad** de una elipse es una medida que indica **qué tan alargada o aplanada** está la curva en comparación con un círculo.

Se representa con la letra e y se define como:

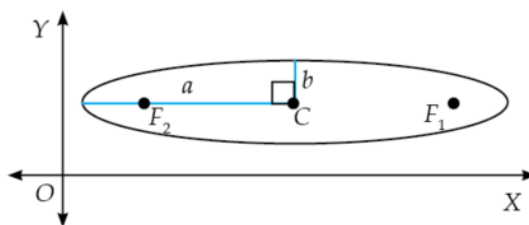
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \text{ dado que } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

La excentricidad es un valor entre cero y uno, $0 < e < 1$. Si $e = 0$, la elipse es un círculo. Si $e = 1$, la elipse se degrada a un segmento de longitud a . Cuanto mayor sea la excentricidad, más separados estarán los focos y más alargada será la elipse.

Elipse con excentricidad cercana a 0. Los focos están muy próximos entre sí y la curva se asemeja a una circunferencia.



Elipse con excentricidad cercana a 1. los focos están muy separados, lo que genera una curva alargada y aplanada.



Ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen

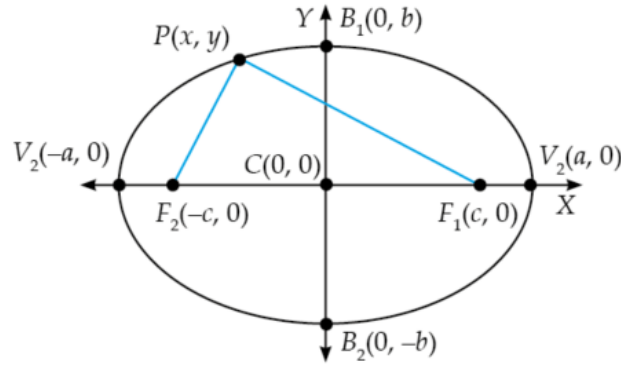
Una elipse es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ de un plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) del mismo plano, es constante.

La representación gráfica de una elipse con centro en el origen puede ser horizontal o vertical, según la orientación del eje mayor, que es el segmento entre los dos vértices de la elipse, como se muestra en las siguientes figuras.

Representación gráfica de una elipse horizontal	Elementos de la elipse horizontal
Además, $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$, donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.	Eje mayor coincide con el eje X. Vértices: $V(\pm a, 0)$ Focos: $F(\pm c, 0)$ Extremos del eje menor: $B(0, \pm b)$ Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, $0 < e < 1$

Representación gráfica de una elipse vertical	Elementos de la elipse vertical
Además, $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$, donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.	Eje mayor coincide con el eje Y. Vértices: $V(0, \pm a)$ Focos: $F(0, \pm c)$ Extremos del eje menor: $B(\pm b, 0)$ Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, $0 < e < 1$

Para determinar la **ecuación ordinaria de una elipse horizontal** con centro en el origen, como la que se muestra en la siguiente figura, donde a , b y c son números reales positivos,



Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera sobre la elipse y F_1 y F_2 , dos puntos fijos llamados focos, tales que satisfacen la siguiente condición

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

De la figura anterior

$$|PF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (1)$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) satisfacen que

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -(x-c)^2 - y^2 + 4a^2 + (x+c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -x^2 + 2cx - c^2 + 4a^2 + x^2 + 2cx + c^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4cx + 4a^2$$

$$\frac{4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{4} = \frac{4cx + 4a^2}{4}$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2$$

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = (cx + a^2)^2$$

$$a^2((x+c)^2 + y^2) = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$$

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$$

$$\begin{aligned}
a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= c^2x^2 + a^4 \\
a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2, \text{ dado que } b^2 = a^2 - c^2 \\
\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Hemos obtenido la **ecuación ordinaria de la elipse horizontal** con centro en el origen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a^2 > b^2$$

Mediante un proceso similar, se obtiene la **ecuación ordinaria de la elipse vertical** con centro en el origen.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ donde } a^2 > b^2$$

Para identificar de forma rápida cual ecuación ordinaria corresponde a una elipse horizontal o a una elipse vertical, identifica dónde está ubicado el valor de a^2 , el cual satisface la condición de que $a^2 > b^2$. En una elipse horizontal, a^2 es el denominador de x^2 y en una elipse vertical, es el denominador de y^2 .

Ejemplo formativo 5.1

1. Determina los elementos de la ecuación ordinaria de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ y gráfícala.

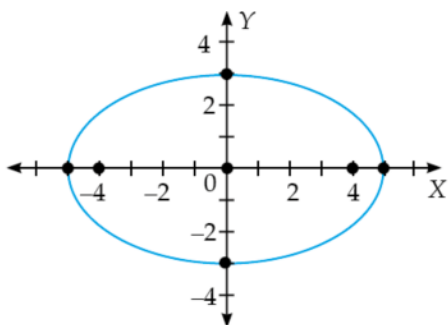
Resolución

En la ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, el denominador del término x^2 es mayor que el denominador del término y^2 , es decir, $25 > 9$. Por lo que el eje mayor es horizontal y coincide con el eje X .

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$, las coordenadas de los vértices son: $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$.

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$, los puntos extremos del eje menor son: $B_1(0, 3)$ y $B_2(0, -3)$.

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$, las coordenadas de los focos son: $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$.



Las coordenadas del centro son: $C(0, 0)$.

Longitud del lado recto: $lr = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

Longitud del eje mayor $|\overline{V_1V_2}| = 2a = 2(5) = 10 \text{ u}$

Longitud del eje menor $|\overline{B_1B_2}| = 2b = 2(3) = 6 \text{ u}$

Longitud del eje focal $|\overline{F_1F_2}| = 2c = 2(4) = 8 \text{ u}$

La gráfica se muestra a la izquierda.

Ejemplo formativo 5.2

1. Determina los elementos de la elipse que tiene por ecuación general $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ y gráficala.

Resolución

Transforma la ecuación en su forma ordinaria.

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \rightarrow \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

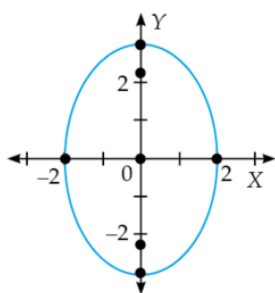
El denominador de x^2 es 4 y el denominador de y^2 es 9, $9 > 4$, por lo que la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ corresponde a una elipse vertical, cuyo eje mayor coincide con el eje Y.

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$, las coordenadas de los vértices son: $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$.

$b^2 = 4 \rightarrow b = 2$, los puntos extremos del eje menor son: $B_1(2, 0)$ y $B_2(-2, 0)$.

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, las coordenadas de los focos son: $F_1(0, \sqrt{5})$ y $F_2(0, -\sqrt{5})$.

Las coordenadas del centro son: $C(0, 0)$.



Longitud del lado recto: $lr = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Longitud del eje mayor $|\overline{V_1V_2}| = 2a = 2(3) = 6 \text{ u}$

Longitud del eje menor $|\overline{B_1B_2}| = 2b = 2(2) = 4 \text{ u}$

Longitud del eje focal $|\overline{F_1F_2}| = 2c = 2(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \text{ u}$

La gráfica se muestra a la izquierda.

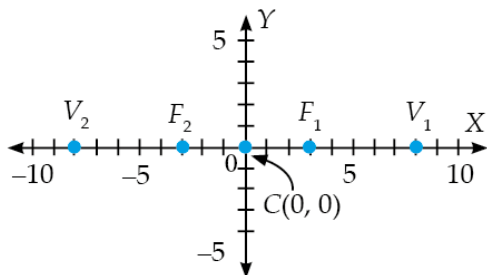
Ejemplo formativo 5.3

1. Determina la ecuación ordinaria de la elipse cuyas coordenadas de sus focos son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$, con vértices en $V_1(-8, 0)$ y $V_2(8, 0)$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación ordinaria.

Grafica las coordenadas de los focos y vértices, luego usa el hecho de que las coordenadas del centro son las del punto medio entre los focos, por lo que $C(0, 0)$, como se muestra en la siguiente figura.



Dado que los focos están sobre el eje X , la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Calcula a^2 .

La distancia del semieje mayor $\overline{CV_1}$ es: $|\overline{CV_1}| = a = 8$, por lo que $a^2 = 64$.

Calcula b^2 .

La distancia del centro al foco F_1 es: $|\overline{CF_1}| = c = 3$.

De lo anterior, $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 9 = 55$.

Determina la ecuación ordinaria.

La ecuación ordinaria de la elipse es $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{55} = 1$.

Ejemplo formativo 5.4

1. Determina la ecuación ordinaria de la elipse con vértices $V_1(0, -6)$ y $V_2(0, 6)$ y la longitud de uno de sus lados rectos es igual a $20/3$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación ordinaria.

Dado que ambos vértices $V_1(0, -6)$ y $V_2(0, 6)$ están sobre el eje Y , la elipse es vertical, por lo que su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Calcula a^2

El eje mayor es la distancia entre los vértices: $|\overline{V_1V_2}| = 2a$.

$$2a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 - (-6))^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(12)^2} = 12$$

De donde $2a = 12 \rightarrow a = 6 \rightarrow a^2 = 36$.

Calcula b^2 .

La fórmula de la longitud del lado recto es $lr = \frac{2b^2}{a}$, y sabemos que en este caso es $\frac{20}{3}$, igualando,

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{20}{3}$$

Sustituyendo $a = 6$

$$\frac{2b^2}{6} = \frac{20}{3} \rightarrow 2b^2 = \frac{6(20)}{3} \rightarrow b^2 = \frac{6(20)}{2(3)} = 20$$

La ecuación ordinaria de la elipse es $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Ejemplo formativo 5.5

1. Calcula la excentricidad de una elipse cuya longitud del eje mayor es 12 y del eje menor es 4.

Resolución

La fórmula de la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$.

Calcula a

Dado que la longitud del eje mayor es $2a = 12 \rightarrow a = 6$.

Calcula c

Del eje menor, $2b = 4 \rightarrow b = 2$.

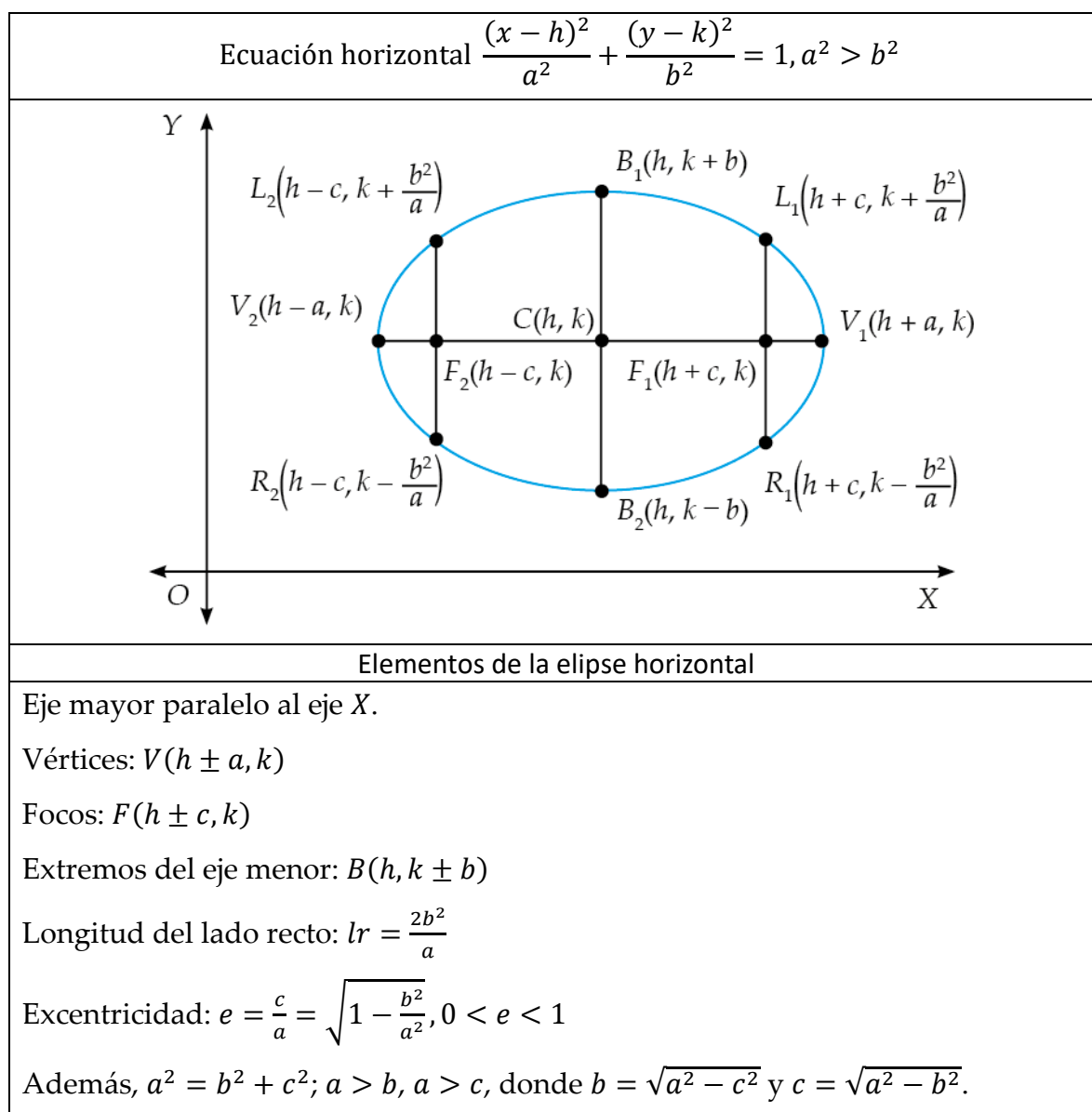
De la relación $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

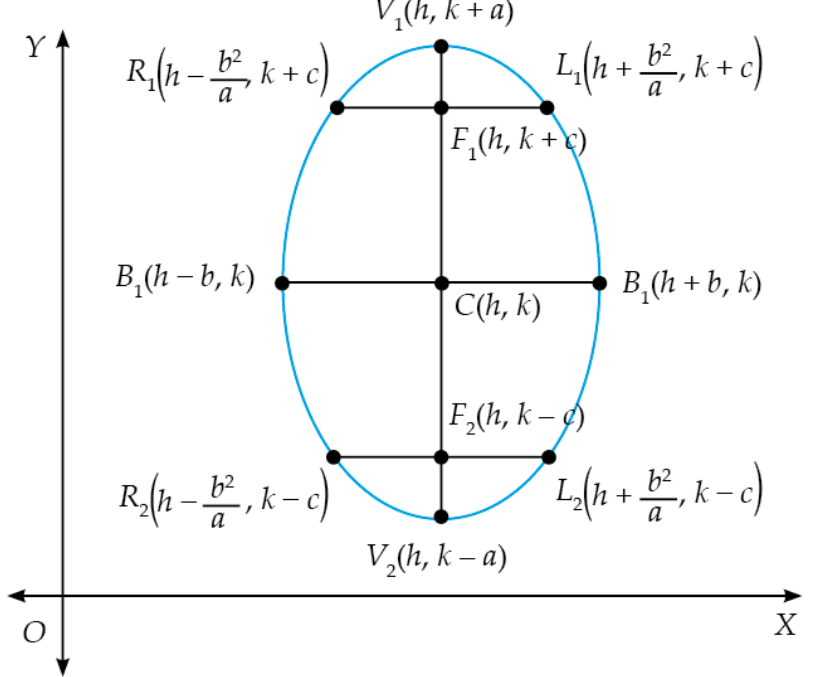
La excentricidad es $e = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.943$.

Esta elipse tiene una excentricidad de aproximadamente 0.943, lo que indica que está bastante aplanada.

Ecuación ordinaria de la elipse con centro fuera del origen

El centro de una elipse, que se denota como $C(h, k)$, puede estar fuera del origen, como se muestra en las siguientes figuras.



Ecuación vertical $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, a^2 > b^2$

Elementos de la elipse vertical
Eje mayor paralelo al eje Y. Vértices: $V(h, k \pm a)$ Focos: $F(h, k \pm c)$ Extremos del eje menor: $B(h \pm b, k)$ Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, 0 < e < 1$ Además, $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b, a > c$, donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

El estudio de la ecuación ordinaria de la elipse permite identificar cómo influyen las constantes h, k, a y b en su representación gráfica.

Los valores de h y k determinan el **desplazamiento del centro** de la elipse respecto al origen: h mueve la figura horizontalmente y k verticalmente.

La constante a representa la **longitud del semieje mayor**, que define si la elipse es horizontal o vertical y así como su forma alargada. Por su parte, b

representa la **longitud del semieje menor**, que afecta el ancho de la elipse según su orientación.

Cuando los valores de a y b son iguales, la elipse se convierte en una circunferencia, ya que ambos ejes tienen la misma longitud. Si a y b son casi iguales, la elipse conserva una forma casi circular. En cambio, cuando hay una diferencia notable entre a y b , la elipse se ve más alargada en la dirección del eje mayor.

Identificar los valores de a y b en la ecuación ordinaria de la elipse ayuda a saber si esta es horizontal o vertical, para ello toma en cuenta que $a^2 > b^2$. Si el denominador de la expresión $(x - h)^2$ es mayor que el denominador de $(y - k)^2$, el eje mayor es horizontal, por lo que la elipse es horizontal. Si el denominador de la expresión $(x - h)^2$ es menor que el denominador de $(y - k)^2$, el eje mayor es vertical, por lo que la elipse es vertical.

Visualizar el efecto de estas constantes en una plataforma como Desmos, como se muestra en las Figuras 5.1 y 5.2, facilita comprender cómo cambian la forma, la orientación y la posición de la elipse al modificar cada uno de ellos.

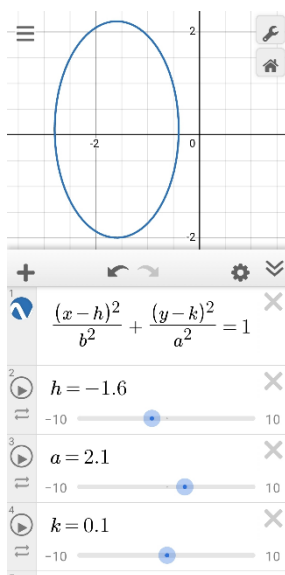


Figura 5.1. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la elipse vertical.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

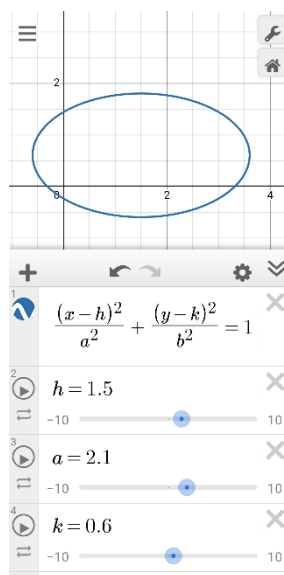


Figura 5.2. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la elipse horizontal.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Ejemplo formativo 5.6

1. Determina los elementos de la elipse $\frac{(x-1)^2}{64} + \frac{(y+3)^2}{49} = 1$ y gráficala.

Resolución

El centro de la elipse es: $C(1, -3)$ dado que $h = 1, k = -3$

Dado que el denominador de la expresión $(x-1)^2$ es mayor que el denominador de la expresión $(y+3)^2$, $64 > 49$, la elipse es horizontal. En consecuencia

$$a^2 = 64 \rightarrow a = 8 \quad \text{y} \quad b^2 = 49 \rightarrow b = 7$$

Luego, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64 - 49} = \sqrt{15}$.

Vértices: $V_1(9, -3)$ y $V_2(-7, -3)$

Focos: $F_1(1 + \sqrt{15}, -3)$ y $F_2(1 - \sqrt{15}, -3)$

Extremos del eje menor: $B_1(1, 4)$ y $B_2(1, -10)$

Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(49)}{8} = \frac{49}{4}$

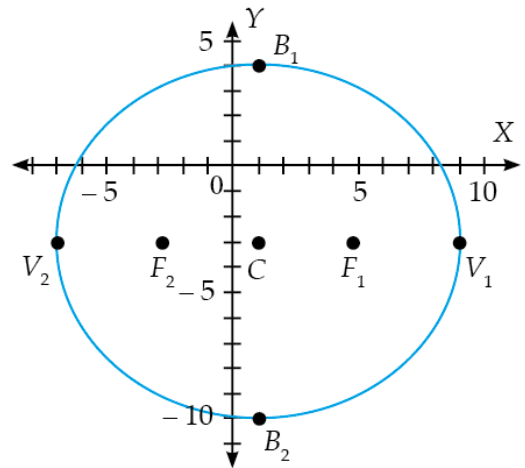
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{8} \approx 0.484$

Longitud del eje mayor: $16 \, u$

Longitud del eje menor: $14 \, u$

Longitud del eje focal: $2\sqrt{15} \, u$

La gráfica se muestra a la derecha.



Ejemplo formativo 5.7

1. Determina la ecuación ordinaria de la elipse, si las coordenadas de los puntos extremos de su eje mayor son $(7, 9)$ y $(7, 3)$, y las coordenadas de su eje menor son $(5, 6)$ y $(9, 6)$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación ordinaria.

Los puntos extremos del eje mayor tienen igual abscisa, 7, por lo que es una elipse vertical de la forma.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Determina h y k .

El valor de h y k es el punto medio del eje mayor, que tiene como puntos extremos $(7, 9)$ y $(7, 3)$.

$$h = \frac{7+7}{2} = 7 \quad \text{y} \quad k = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Calcula a^2 .

El valor de a es la mitad de la distancia entre los puntos extremos del eje mayor.

$$a = \frac{\sqrt{(3-9)^2 + (7-7)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 0}}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2}}{2} = \frac{|-6|}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow a^2 = 9$$

Calcula b^2 .

El valor de b es la mitad de la distancia entre los puntos extremos del eje menor.

$$b = \frac{\sqrt{(6-6)^2 + (9-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{0+4^2}}{2} = \frac{\sqrt{4^2}}{2} = \frac{\sqrt{0+4^2}}{2} \cdot \frac{4}{2} = 2 \rightarrow b^2 = 4$$

Determina la ecuación ordinaria.

La ecuación ordinaria de la elipse es

$$\frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$$

Ejemplo formativo 5.8

1. Determina la ecuación ordinaria de la elipse cuyos focos son los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$, y su excentricidad es igual a $2/3$.

Resolución

Identifica la forma de la ecuación ordinaria.

Focos: $F_1(4, 0)$ y $F_2(0, 0)$

Dado que la ordenada de los focos es igual, 0, la elipse es horizontal con ecuación de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Calcula h y k .

El centro $C(h, k)$, es el punto medio de $\overline{F_2F_1}$.

$$h = \frac{4+0}{2} = 2 \quad y \quad k = \frac{0+0}{2} = 0$$

El centro de la elipse es $C(2, 0)$.

Calcula a^2 .

La excentricidad de la elipse es $\frac{2}{3}$ y su fórmula es $e = \frac{c}{a}$, de donde $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Necesitas conocer c , que es la distancia del centro $C(2, 0)$ a uno de sus focos, por ejemplo, a $F_2(0, 0)$.

$$c = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4+0} = 2$$

Luego sustituye $c = 2$.

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{a} = \frac{2}{3} \rightarrow 2(3) = 2a \rightarrow 3 = a \rightarrow a^2 = 9$$

Calcula b^2 .

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$$

Determina la ecuación ordinaria.

La ecuación ordinaria de la elipse es $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Ecuación general de la elipse

La ecuación general de la elipse es

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A > 0, C > 0$ y $A \neq C$, lo cual garantiza que $AC > 0$. Esta forma general se obtiene al desarrollar la ecuación ordinaria de la elipse y reorganizar los términos mediante productos notables y operaciones algebraicas. La condición $AC > 0$ permite diferenciar a la elipse de otras cónicas, como la hipérbola ($AC < 0$) o la parábola ($AC = 0$), dentro del análisis de las secciones cónicas.

Ejemplo formativo 5.9

1. Determina la ecuación general de la elipse $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Resolución

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{4} &= 1 \\ (64)(4) \left(\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{4} \right) &= (64)(4)(1) \end{aligned}$$

$$\frac{\cancel{64}(4)(x+2)^2}{\cancel{64}} + \frac{(64)\cancel{4}(y-1)^2}{\cancel{4}} = 256$$

$$(4)(x+2)^2 + (64)(y-1)^2 = 256$$

$$(4)(x^2 + 4x + 4) + (64)(y^2 - 2y + 1) = 256$$

$$4x^2 + 16x + 16 + 64y^2 - 128y + 64 = 256$$

$$4x^2 + 16x + 16 + 64y^2 - 128y + 64 - 256 = 0$$

$$4x^2 + 64y^2 + 16x - 128y - 176 = 0$$

La ecuación general de la elipse es $4x^2 + 64y^2 + 16x - 128y - 176 = 0$.

Ejemplo formativo 5.10

1. Determina la ecuación ordinaria de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$.

Resolución

$$\begin{aligned}
 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 &= 0 \\
 (9x^2 - 72x) + (4y^2 - 24y) &= -144 \\
 9(x^2 - 8x) + 4(y^2 - 6y) &= -144 \\
 9\left(x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right) + 4\left(y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) &= -144 + 9\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{2}\right)^2 \\
 9(x^2 - 8x + 4^2) + 4(y^2 - 6y + 3^2) &= -144 + 9(4)^2 + 4(3)^2 \\
 9(x - 4)^2 + 4(y - 3)^2 &= -144 + 144 + 36 \\
 9(x - 4)^2 + 4(y - 3)^2 &= 36 \\
 \frac{9(x - 4)^2}{36} + \frac{4(y - 3)^2}{36} &= \frac{36}{36}
 \end{aligned}$$

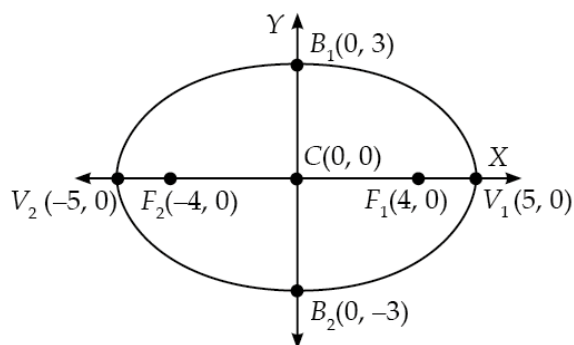
$$\frac{(x - 4)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$$

La ecuación ordinaria es $\frac{(x - 4)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$.

Evaluación formativa 6.1

1. Determina lo que se te pide a partir de la información dada en las siguientes elipses.

a)



Es una elipse con centro en _____

Su eje mayor coincide con el eje _____

Es una elipse _____

$a =$

$b =$

$c =$

$e =$

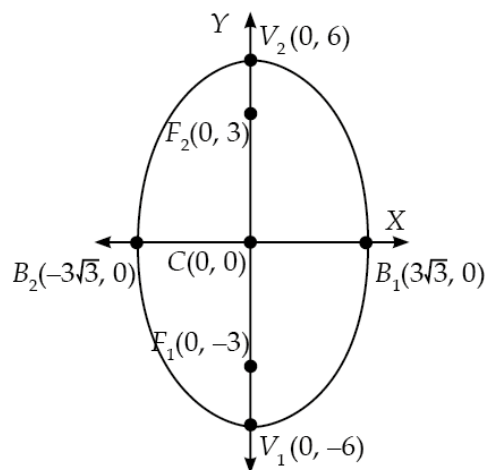
$lr =$

Distancia focal:

Longitud del eje mayor:

Longitud del eje menor:

b)



Es una elipse con centro en _____

Su eje mayor coincide con el eje _____

Es una elipse _____

$a =$

$b =$

$c =$

$e =$

$lr =$

Distancia focal:

Longitud del eje mayor:

Longitud del eje menor:

2. Determina los elementos de las siguientes elipses y gráficalas.

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$

c) $x^2 + 16y^2 - 64 = 0$

d) $9x^2 + 4y^2 = 25$

3. Determina la ecuación ordinaria de la elipse, según los datos proporcionados.

a) $V(\pm 6, 0)$ y $F(\pm 4, 0)$

b) $V(0, \pm 4)$ y $B(\pm \sqrt{7}, 0)$

c) $F(0, \pm 2)$ y lado recto, $lr = 10/3$

d) $F(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = 4/5$

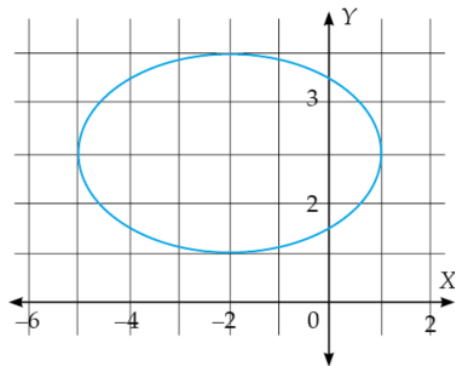
e) Excentricidad $1/3$ y lado recto $16/3$, tiene dos soluciones.

f) Distancia focal igual al eje menor y su lado recto es $\sqrt{2}$ (tiene dos soluciones).

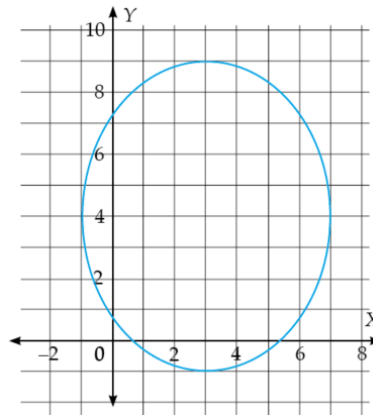
4. Calcula la excentricidad de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$.

5. Determina la ecuación ordinaria de la elipse que representa a cada una de las siguientes gráficas.

a)



b)



6. Un planeta órbita alrededor de su estrella siguiendo una trayectoria elíptica. La distancia entre los focos de la elipse es de 60 millones de kilómetros y la longitud del eje mayor es de 100 millones de kilómetros.
- Determina la excentricidad de la órbita del planeta.
 - Calcula la distancia del planeta a su estrella cuando está en el punto más cercano de su órbita.
 - ¿La órbita es muy alargada o casi circular? Justifica tu respuesta.
7. Determina los elementos de las siguientes elipses y grafícalas.
- $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
 - $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
8. Determina la ecuación ordinaria de la elipse según sus elementos dados.
- $C(7, -2)$, eje mayor igual a 8 y eje focal paralelo al eje X
 - $V_1(-2, -5)$, $V_2(-2, 3)$, $F_1(-2, -4)$ y $F_2(-2, 2)$
 - $C(-4, 0)$, uno de sus focos en $(-1, 0)$ y la longitud de su lado recto igual a $7/2$
 - $F_1(-9, -2)$, $F_2(-3, -2)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$
 - Eje mayor paralelo al eje X , $e = 3/5$ y $C(3, 2)$
9. Una nave espacial realiza una maniobra orbital siguiendo una trayectoria elíptica. El punto más cercano a la Tierra está en $(2, 5)$, y el punto más alejado en $(10, 5)$. Además, la distancia entre el centro de la trayectoria y uno de los focos es de 3 unidades.
- Determina la ecuación ordinaria de la elipse que describe la trayectoria, suponiendo que su eje mayor es horizontal.
 - Calcula la excentricidad de la órbita.
 - Interpreta el papel de los focos en este tipo de trayectorias.
 - Grafica la elipse en Desmos o GeoGebra.
10. Determina la ecuación general de cada una de las siguientes elipses.
- $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$
 - $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 4(y-1)^2 = 4$
 - $\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{7} = 1$
11. Determina la ecuación ordinaria de cada una de las siguientes elipses.
- $x^2 + 16y^2 - 10x + 64y + 73 = 0$
 - $36x^2 + 16y^2 + 180x - 24y + 90 = 0$
 - $3x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 65 = 0$

12. Determina si las siguientes ecuaciones representan a una elipse usando la condición $AC > 0$.

a) $x^2 - 2y^2 - 8x + 12y - 10 = 0$

b) $-5x^2 + 8y^2 + 20x - 64y - 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

e) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 61 = 0$

Autoevaluación y coevaluación 6.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: ____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Determiné los elementos como vértices, focos, eje mayor, eje menor, lado recto y excentricidad a partir de la ecuación de una elipse. (M1-C1)			
Reconocí la orientación (horizontal o vertical) de la elipse a partir de sus elementos o su ecuación. (M1-C2)			
Utilicé la elipse como modelo en contextos de astronomía (órbitas planetarias) o acústica (salas elípticas). (M1-C3)			
Argumenté los procedimientos realizados para obtener o transformar una ecuación. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

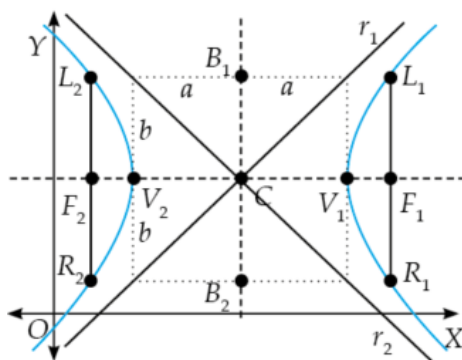
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 6 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
-----------	---------------------	-------	---------------

Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con sus compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			
Determinó los elementos como vértices, focos, eje mayor, eje menor, lado recto y excentricidad a partir de la ecuación de una elipse. (M1-C1)			
Reconoció la orientación (horizontal o vertical) de la elipse a partir de sus elementos o su ecuación. (M1-C2)			
Utilizó la elipse como modelo en contextos de astronomía (órbitas planetarias) o acústica (salas elípticas). (M1-C3)			
Argumentó los procedimientos realizados para obtener o transformar una ecuación. (M1-C4)			

Nombre y firma de quien coevalúa

PA 6. La hipérbola



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde $A = b^2$; $C = -a^2$; $D = -2b^2h$; $E = 2a^2k$; $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

Progresión de aprendizaje 6

Analiza las relaciones entre las propiedades geométricas y algebraicas de la hipérbola, y elabora modelos matemáticos que apliquen estas relaciones para resolver problemas en campos como la navegación, las telecomunicaciones o la dinámica orbital.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Evaluación diagnóstica 6.1

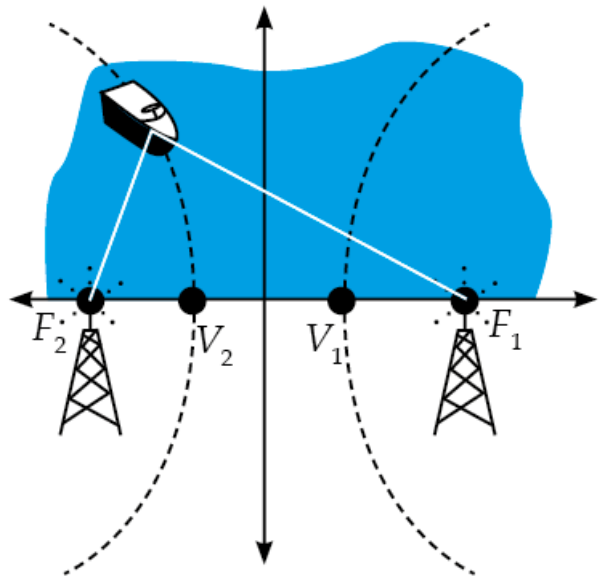
Analiza y selecciona la respuesta correcta a cada pregunta.

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$?
a) $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ b) $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ c) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. ¿Qué condición deben satisfacer A y C para que la ecuación general $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente a una elipse?
a) $AC = 0$ b) $AC > 0$ c) $AC < 0$
3. ¿Cuál de las siguientes opciones describe correctamente el lugar geométrico de una elipse?
a) El conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija.
b) El conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.
c) El conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Elementos de la hipérbola

Un sistema de localización geográfica utiliza la diferencia en el tiempo de llegada de señales provenientes de dos antenas emisoras para determinar la posición exacta de un objeto móvil. Cada vez que el objeto se desplaza, el sistema calcula automáticamente en qué lugar del plano se encuentra, basándose en el hecho de que la diferencia entre las distancias a cada antena permanece constante, como se muestra en la figura de la derecha.

El ingeniero encargado del sistema explica que, para representar correctamente todos los puntos que cumplen esta condición, se utiliza una curva llamada **hipérbola**, que tiene una propiedad geométrica única: es el lugar geométrico de los puntos cuyo **valor absoluto** de la **diferencia de distancias** a dos puntos fijos, llamados **focos**, es constante.

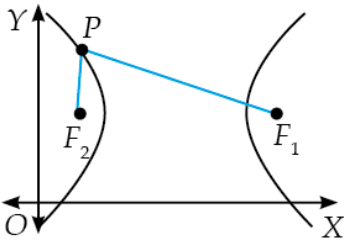
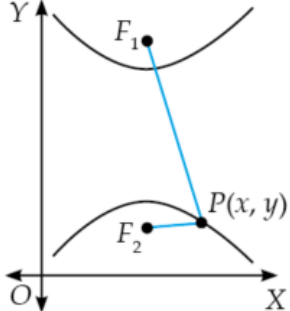
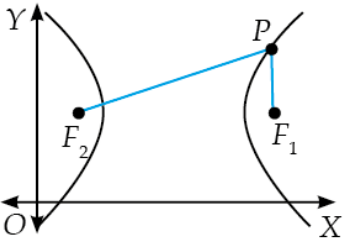
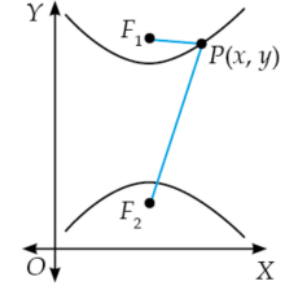


Para que el sistema de localización funcione con precisión, es fundamental entender cómo se construye esta curva y qué características debe tener, la hipérbola permite identificar las posibles posiciones de un objeto cuya señal llega con diferencia de tiempo constante a dos receptores.

Una **hipérbola**, como se ilustra en la figura de la derecha, es el conjunto de todos los puntos del plano tales que el valor absoluto de la **diferencia de las distancias** a dos puntos fijos, llamados **focos** F_1 y F_2 , es igual a una constante positiva $2a$. Si $P(x, y)$ es un punto sobre la hipérbola, entonces se cumple que:

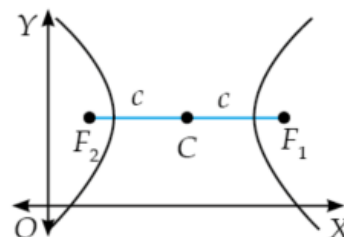
$$||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a$$

La condición geométrica anterior es equivalente a las siguientes dos relaciones, de acuerdo a la ubicación del punto P .

$ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$	El punto P está sobre la rama izquierda	El punto P está sobre la rama de abajo
		
$ \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$	El punto P está sobre la rama derecha	El punto P está sobre la rama de arriba
		

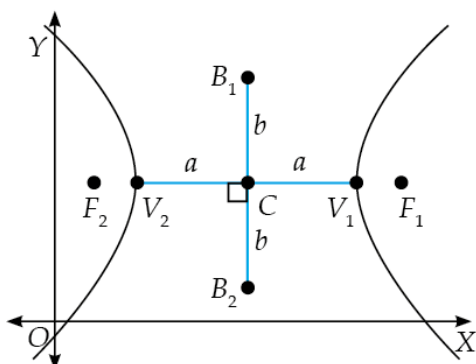
La distancia entre F_1 y F_2 , se denomina **distancia focal** y se tiene que $|\overline{F_1F_2}| = 2c$, como se muestra en la figura de la derecha.

El **centro** de la hipérbola, denotado como C , es el punto medio entre los focos.

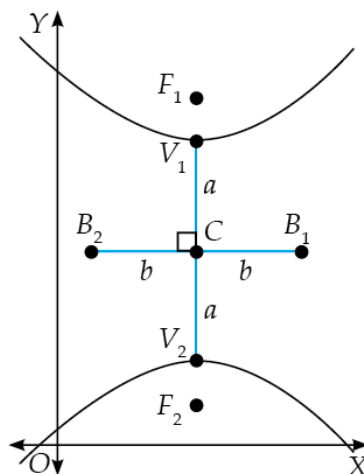


En las siguientes figuras, los **vértices** de la hipérbola son V_1 y V_2 . El segmento $\overline{V_1V_2}$ es el eje de simetría de la hipérbola y se denomina **eje transverso**, que es el segmento que une los vértices de la hipérbola y pasa por el centro y se tiene que $|\overline{V_1V_2}| = 2a$. Donde a es la longitud del semieje transverso

Hipérbola horizontal

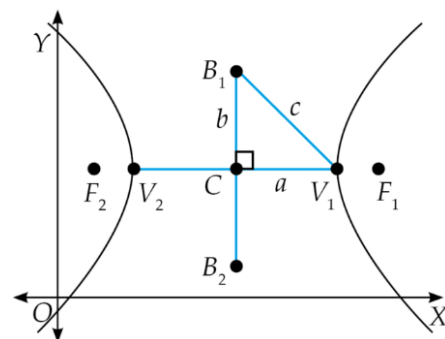


Hipérbola vertical



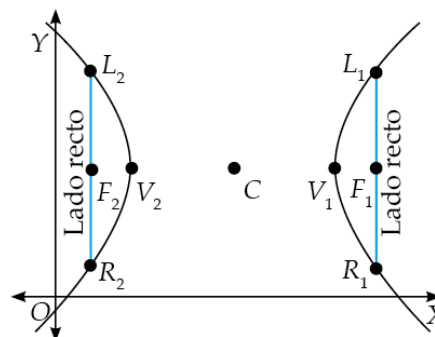
El segmento $\overline{B_1B_2}$ pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje transverso, además, es eje de simetría de la hipérbola y pasa por el centro. A este segmento se le llama **eje conjugado** y se tiene que $|\overline{B_1B_2}| = 2b$.

En la figura de la derecha, la distancia del centro a uno de los vértices es a , la distancia del centro a B_1 o a B_2 es b , la distancia de uno de los vértices a B_1 o a B_2 es c . Estas distancias se relacionan mediante la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$.



El **lado recto** de una hipérbola, como se muestra en la figura de la derecha, es el segmento que pasa por uno de los focos, es perpendicular al eje transverso y sus extremos se encuentran sobre la hipérbola. El lado recto está dado por la fórmula

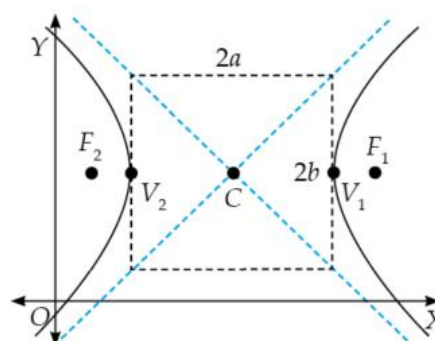
$$lr = \frac{2b^2}{a}$$



La excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a}$, puesto que $2c > 2a$, entonces $c > a$, y por tanto $e = \frac{c}{a} > 1$. Para cada cónica, la excentricidad varía como se muestra a continuación:

- Circunferencia: $e = 0$
- Elipse: $0 < e < 1$
- Parábola: $e = 1$
- Hipérbola: $e > 1$

Las **asíntotas** de una hipérbola son rectas a las que la curva se aproxima a medida que sus ramas se alejan del centro, pero nunca las toca ni las cruza. Las asíntotas **pasan por el centro** de la hipérbola y por las **diagonales del rectángulo auxiliar** de dimensiones $2a$ y $2b$, como se muestra en la figura de la derecha.



Ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en el origen

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Modelando lo anterior nos lleva a $||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a$.

De la definición de valor absoluto tenemos que:

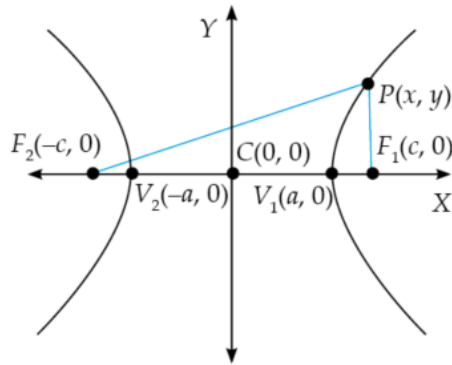
$$||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a \rightarrow \begin{cases} |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \\ -(|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|) = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \\ |\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a \end{cases}$$

Una hipérbola puede ser horizontal o vertical. En el caso de la hipérbola horizontal tenemos dos situaciones:

a) $ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$	b) $ \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$

Vamos a deducir la ecuación ordinaria de una parábola horizontal con centro en el origen. Lo haremos partiendo de $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$ (el caso $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$

se deja al estudiante). Como la que se muestra en la siguiente figura, con a , b y c números reales positivos que representan distancias características de la curva.



Sea $P(x, y)$ un punto sobre la parábola y, F_1 y F_2 puntos fijos llamados focos que satisfacen la siguiente condición geométrica:

$$|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$$

$$|\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$|\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Sustituyendo en $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$2cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\frac{4cx}{4a} - \frac{4a^2}{4a} = \frac{4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{4a}$$

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{c^2 x^2}{a^2} + a^2 &= x^2 + c^2 + y^2 \\
\frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2 - y^2 &= c^2 - a^2 \\
\frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{a^2 x^2}{a^2} - y^2 &= c^2 - a^2 \\
\frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2} - y^2 &= c^2 - a^2 \\
\frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= \frac{c^2}{c^2 - a^2} - \frac{a^2}{c^2 - a^2} \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= \frac{c^2 - a^2}{c^2 - a^2} \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \text{ donde } b^2 = c^2 - a^2
\end{aligned}$$

Hemos obtenido la **ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal** con centro en el origen.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Representación gráfica	Elementos de la hipérbola horizontal
	Eje transvers0 coincide con el eje X.
	Vértices: $V(\pm a, 0)$
	Focos: $F(\pm c, 0)$
	Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm b)$
	Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$
	Ecuaciones de las asíntotas:
	$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$
	Excentricidad: $e = \frac{c}{a} > 1$
	Longitud del eje transvers0: $ \overline{V_1V_2} = 2a$
	Longitud del eje conjugado: $ \overline{B_1B_2} = 2b$
	Longitud del eje focal: $ \overline{F_1F_2} = 2c$

Además, $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, donde $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

De manera análoga se obtiene la **ecuación ordinaria de la hipérbola vertical** con centro en el origen.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Representación gráfica	Elementos de la hipérbola vertical
	Eje transverso coincide con el eje Y. Vértices: $V(0, \pm a)$ Focos: $F(0, \pm c)$ Extremos del eje conjugado: $B(\pm b, 0)$ Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$ Ecuaciones de las asíntotas: $y = \frac{a}{b}x \quad y = -\frac{a}{b}x$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a} > 1$ Longitud del eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a$ Longitud del eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b$ Longitud del eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$
Además, $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, donde $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.	

Ejemplo formativo 6.1

2. Determina los elementos de la ecuación ordinaria de la hipérbola $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ y gráficala.

Resolución

Dado que el término $\frac{x^2}{36}$ es positivo, el eje transverso es horizontal, así que la hipérbola es horizontal de la forma.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Determina los elementos.

Del término $\frac{x^2}{36}$, $a^2 = 36$, de donde $a = 6$.

Del término $\frac{y^2}{25}$, se tiene que $b^2 = 25$, de donde $b = 5$.

De la relación $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$

Los elementos de la hipérbola son:

Vértices: $V_1(6, 0)$ y $V_2(-6, 0)$	Ecuaciones de las asíntotas:
Focos: $F_1(\sqrt{61}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{61}, 0)$	$y = \frac{b}{a}x = \frac{5x}{6}$ $y = -\frac{b}{a}x = -\frac{5x}{6}$
Extremos del eje conjugado: $B_1(0, 5)$ y $B_2(0, -5)$	Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{61}}{6} \approx 1.3$
Longitud del lado recto:	Longitud del eje transverso: $2a = 2(6) = 12$
$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$	Longitud del eje conjugado: $2b = 2(5) = 10$
	Longitud del eje focal: $2c = 2\sqrt{61}$

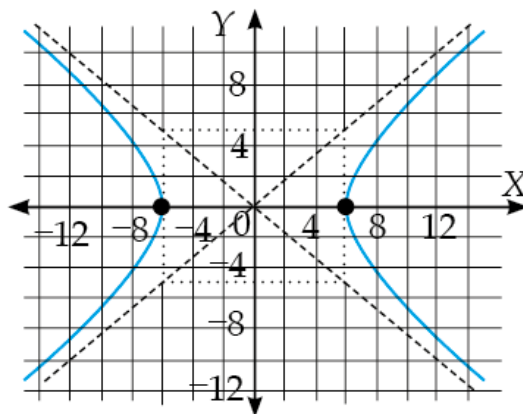
Grafica la hipérbola.

Determina la orientación de la hipérbola. La hipérbola es horizontal.

Grafica los vértices de la hipérbola, $V_1(6, 0)$ y $V_2(-6, 0)$.

Dibuja las asíntotas de la hipérbola. Usa líneas punteadas y dibuja el rectángulo centrado en el origen cuyos vértices son $(-a, b)$, $(-a, -b)$, (a, b) y $(a, -b)$. Para $a = 6$ y $b = 5$, las coordenadas de los vértices del rectángulo son $(-6, 5)$, $(-6, -5)$, $(6, 5)$ y $(6, -5)$. Dibuja y extiende las diagonales del rectángulo. Estas líneas son las asíntotas de la hipérbola.

Traza la hipérbola. Comienza en cada una de los vértices y dibuja las dos ramas de manera que se acerquen a las asíntotas, pero sin llegar a tocarlas, como se muestra en la figura de la derecha.



Ejemplo formativo 6.2

1. Determina la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F_2(0, -4)$ y $F_1(0, 4)$, y los vértices son $V_2(0, -2)$ y $V_1(0, 2)$.

Resolución

Determina la forma de la ecuación ordinaria de la hipérbola.

Dado que la abscisa de los focos $F_2(0, -4)$ y $F_1(0, 4)$ es igual, abscisa igual a 0, el eje transverso es vertical y la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Determina el valor de a^2 .

Las coordenadas de los vértices están dadas por $V_2(0, -a)$ y $V_1(0, a)$ y en este caso los vértices son $V_2(0, -2)$ y $V_1(0, 2)$, así que $a = 2$ y $a^2 = 4$.

Determina el valor de b^2 .

Primero determina el valor de c y luego usa la relación $b^2 = c^2 - a^2$.

Las coordenadas de los focos están dadas por $F_2(0, -c)$ y $F_1(0, c)$. Dado que los focos son $F_2(0, -4)$ y $F_1(0, 4)$, se tiene que $c = 4$, $c^2 = 16$.

Luego, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

La ecuación ordinaria de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

Ejemplo formativo 6.3

1. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola cuyos vértices son $V_2(-6, 0)$ y $V_1(6, 0)$ y la excentricidad es $\sqrt{5}/2$.

Resolución

Determina la forma de la ecuación ordinaria de la hipérbola.

Dado que la ordenada de los vértices $V_2(-6, 0)$ y $V_1(6, 0)$ son iguales, ordenada igual 0, la hipérbola es horizontal y su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Determina a^2 .

Los vértices son $V_2(-a, 0)$ y $V_1(a, 0)$. Los puntos dados son $V_2(-6, 0)$ y $V_1(6, 0)$, así que $a = 6$, $a^2 = 36$.

Determina b^2 .

Primero determina el valor de c^2 usando la excentricidad y luego calcula b^2 usando la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

La fórmula de la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$ y la excentricidad de la hipérbola es $\frac{\sqrt{5}}{2}$, igualándolas y sustituyendo $a = 6$, se tiene que

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{c}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow c = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} \rightarrow c^2 = (3\sqrt{5})^2 = 9(5) = 45$$

Ahora, usando la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = 45 - 36 = 9$$

La ecuación ordinaria de la hipérbola es

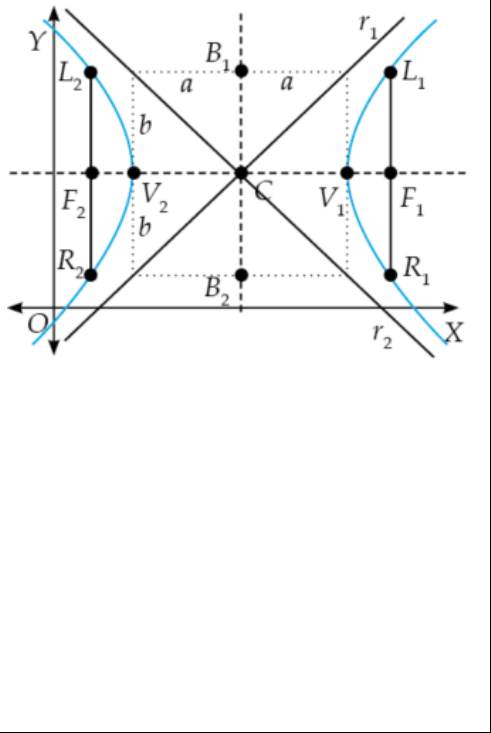
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola con centro fuera del origen

La ecuación ordinaria de la hipérbola con centro fuera del origen, $C(h, k)$, puede ser horizontal o vertical.

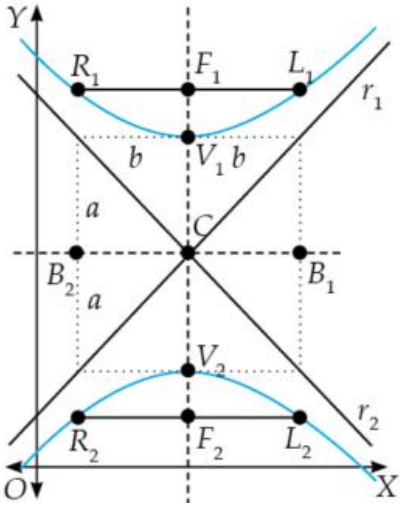
Si el eje transverso es paralelo al eje X , la **ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal** es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

	Elementos de la hipérbola horizontal
	Vértices: $V(h \pm a, k)$
	Focos: $F(h \pm c, k)$
	Extremos del eje conjugado: $B(h, k \pm b)$
	Ecuaciones de las asíntotas:
	$r_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h)$ $r_2: y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$
	Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$
	Longitud del eje transverso: $ \overline{V_1V_2} = 2a$
	Longitud del eje conjugado: $ \overline{B_1B_2} = 2b$
	Longitud del eje focal: $ \overline{F_1F_2} = 2c$
	Excentricidad: $e = \frac{c}{a} > 1$
Además, $c^2 = a^2 + b^2$; $c > a$, $c > b$, donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ y $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.	

Si el eje transverso es paralelo al eje Y , la **ecuación ordinaria de la hipérbola vertical** es

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

	Elementos de la hipérbola horizontal
	Vértices: $V(h, k \pm a)$
	Focos: $F(h, k \pm c)$
	Extremos del eje conjugado: $B(h \pm b, k)$
	Ecuaciones de las asíntotas:
	$r_1: y - k = \frac{a}{b}(x - h)$ $r_2: y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$
	Longitud del lado recto: $lr = \frac{2b^2}{a}$
	Eje transverso: $ \overline{V_1V_2} = 2a$
	Eje conjugado: $ \overline{B_1B_2} = 2b$
	Eje focal: $ \overline{F_1F_2} = 2c$
	Excentricidad: $e = \frac{c}{a} > 1$
Además, $c^2 = a^2 + b^2$; $c > a$, $c > b$, donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ y $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.	

El estudio de la ecuación ordinaria de la hipérbola permite identificar cómo influyen las constantes h , k , a y b en su representación gráfica. Los valores de h y k determinan el desplazamiento del centro de la hipérbola respecto al origen: h traslada la figura horizontalmente y k verticalmente.

La constante a está relacionada con la distancia del centro a los vértices, es decir, define el alcance de la hipérbola a lo largo del eje transverso. La orientación de dicho eje depende de la ubicación del término positivo en la ecuación:

- Si $\frac{(x-h)^2}{a^2}$ es positivo, la hipérbola es horizontal.
- Si $\frac{(y-k)^2}{a^2}$ es positivo, la hipérbola es vertical.

Por su parte, la constante b está asociada la longitud del eje conjugado y se usa en la construcción del rectángulo auxiliar que guía la dirección de las asíntotas, las cuales representan las direcciones hacia las que se aproximan las ramas de la hipérbola.

A diferencia de la elipse, en la hipérbola no se habla de eje mayor o eje menor, sino de eje transverso o eje conjugado y sus longitudes están determinadas por $2a$ y $2b$, respectivamente. Además, recordando que la distancia del centro a uno de los

focos de la hipérbola es c , los valores a , b y c , se relacionan mediante la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$.

Visualizar el efecto de estas constantes en el software Desmos, como se muestra en las Figuras 6.1 y 6.2, facilita comprender cómo varía la orientación, la apertura y la ubicación de la hipérbola al modificar cada una de las constantes h , k , a y b .

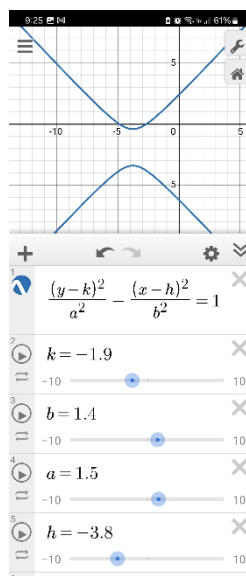


Figura 6.1. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la hipérbola vertical.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

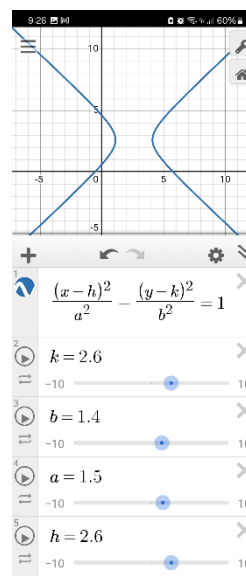


Figura 6.2. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la hipérbola horizontal.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Ejemplo formativo 6.4

1. Determina los elementos de la hipérbola $\frac{(y-2)^2}{81} - \frac{(x-3)^2}{49} = 1$ y gráficala.

Resolución

Dado que $\frac{(y-2)^2}{81}$ es positivo, el eje transversal es vertical, así que la hipérbola es vertical.

Determina los elementos.

De la expresión $\frac{(y-2)^2}{81}$, $a^2 = 81$, de donde $a = 9$.

De la expresión $\frac{(x-3)^2}{49}$, se tiene que $b^2 = 49$, de donde $b = 7$.

De la relación $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{81 + 49} = \sqrt{130}$

Dado que $\frac{(y-2)^2}{81}$ es positivo, el eje transversal es vertical, así que la hipérbola es vertical.

Los elementos de la hipérbola son:

Centro: $C(3, 2)$	Ecuaciones de las asíntotas:
Vértices: $V_1(3, 11)$ y $V_2(3, -7)$	$y - 2 = \frac{9}{7}(x - 3)$
Focos: $F_1(3, 2 + \sqrt{130})$ y $F_2(3, 2 - \sqrt{130})$	$y - 2 = -\frac{9}{7}(x - 3)$
Extremos del eje conjugado: $B_1(10, 2)$ y $B_2(-4, 2)$	Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{130}}{9} \approx 1.27$
Longitud del lado recto:	Longitud del eje transverso: $2a = 2(9) = 18$
$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{98}{9}$	Longitud del eje conjugado: $2b = 2(7) = 14$
	Longitud del eje focal: $2c = 2\sqrt{130}$

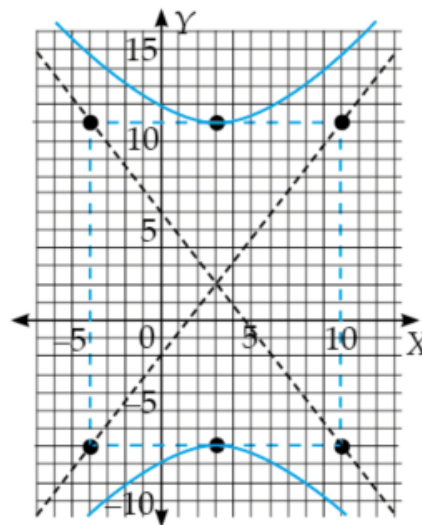
Grafica la hipérbola.

Determina la orientación de la hipérbola. Dado que $\frac{(y-2)^2}{81}$ es positivo, la hipérbola es vertical.

Grafica el centro y los vértices de la hipérbola: $C(3, 2)$, $V_1(3, 11)$ y $V_2(3, -7)$.

Dibuja las asíntotas de la hipérbola. Traza el rectángulo auxiliar centrado en $C(3, 2)$ cuyos vértices son $(h - b, k + a)$, $(h - b, k - a)$, $(h + b, k + a)$ y $(h + b, k - a)$ y traza el rectángulo con línea punteadas. Para $h = 3$, $k = 2$, $a = 9$ y $b = 7$, las coordenadas de los vértices del rectángulo son $(-4, 11)$, $(-4, -7)$, $(10, 11)$ y $(10, -7)$. Dibuja y extiende las diagonales del rectángulo. Estas líneas son las asíntotas de la hipérbola.

Dibuja la hipérbola. Comienza en cada uno de los vértices y dibuja las dos ramas de manera que se acerquen a las asíntotas, pero sin llegar a tocarlas, como se muestra en la figura de la derecha.



Ejemplo formativo 6.5

1. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola que tiene su centro en $C(4, -2)$, un foco en $(7, -2)$ y un vértice en $(6, -2)$.

Resolución

Determina h y k .

Del centro $C(4, -2)$, $h = 4$ y $k = -2$.

Determina la forma de la ecuación de la hipérbola.

Dado que la ordenada del centro $C(4, -2)$ y del vértice $(6, -2)$ son iguales, ordenada igual a -2 , el eje transverso es horizontal, así que la ecuación es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Calcula a^2 .

La distancia del centro $C(4, -2)$ al vértice $(6, -2)$ es

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 - 4)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{4 + 0} = 2 \rightarrow a^2 = 4$$

Calcula b^2 .

Primero determina c^2 . La distancia del centro $C(4, -2)$ al foco $(7, -2)$ es

$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7 - 4)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3 \rightarrow c^2 = 9$$

Usa la relación

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$$

La ecuación ordinaria de la hipérbola es

$$\frac{(x - 4)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{5} = 1$$

Ecuación general de la hipérbola

La ecuación general de la hipérbola se expresa en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C son coeficientes reales de signos opuestos, lo cual garantiza que $AC < 0$. Esta forma general se obtiene al desarrollar la ecuación ordinaria de la hipérbola al desarrollar cada binomio al cuadrado, simplificar los términos algebraicamente e igualar a cero.

Reconocer la condición sobre los coeficientes cuadráticos, $AC < 0$, permite distinguir la hipérbola de otras cónicas, como de la elipse o de la parábola, dentro del estudio general de las secciones cónicas.

Ejemplo formativo 6.6

1. Determina la ecuación general de la hipérbola $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{7} = 1$.

Resolución

$$\begin{aligned}\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{7} &= 1 \\ (9)(7) \frac{(y+1)^2}{9} - (9)(7) \frac{(x+2)^2}{7} &= (9)(7)(1) \\ (7)(y+1)^2 - (9)(x+2)^2 &= 63 \\ (7)(y^2 + 2y + 1) - (9)(x^2 + 4x + 4) &= 63 \\ 7y^2 + 14y + 7 - (9x^2 + 36x + 36) &= 63 \\ 7y^2 + 14y + 7 - 9x^2 - 36x - 36 &= 63 \\ -9x^2 + 7y^2 - 36x + 14y + 7 - 36 - 63 &= 0 \\ -9x^2 + 7y^2 - 36x + 14y - 92 &= 0 \\ (-1)(-9x^2 + 7y^2 - 36x + 14y - 92) &= (-1)(0) \\ 9x^2 - 7y^2 + 36x - 14y + 92 &= 0\end{aligned}$$

Po lo tanto la ecuación general de la hipérbola es $9x^2 - 7y^2 + 36x - 14y + 92 = 0$.

Ejemplo formativo 6.7

1. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola $4x^2 - 5y^2 - 16x - 10y - 9 = 0$.

Resolución

$$\begin{aligned}4x^2 - 5y^2 - 16x - 10y - 9 &= 0 \\ (4x^2 - 16x) + (-5y^2 - 10y) &= 9 \\ 4(x^2 - 4x) - 5(y^2 + 2y) &= 9 \\ 4\left(x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) - 5\left(y^2 + 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) &= 9 + 4\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ 4(x^2 - 4x + (2)^2) - 5(y^2 + 2y + (1)^2) &= 9 + 4(2)^2 - 5(1)^2 \\ 4(x-2)^2 - 5(y+1)^2 &= 20 \\ \frac{4(x-2)^2}{20} - \frac{5(y+1)^2}{20} &= \frac{20}{20} \\ \frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{4} &= 1\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación ordinaria de la hipérbola es $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

Una forma de conocer la naturaleza de la ecuación general de la hipérbola

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es realizar el análisis de sus coeficientes A y C :

- Si $A = C = 0$, la ecuación representa una recta.
- Si $A = C \neq 0$, la ecuación representa una circunferencia.
- Si A o C es igual a cero, la ecuación representa una parábola.
- Si $A \neq C$ y de signos iguales, tales que $AC > 0$, la ecuación representa una elipse, un punto o el conjunto vacío.
- Si A y C tienen signos contrarios, tales que $AC < 0$, la ecuación representa una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

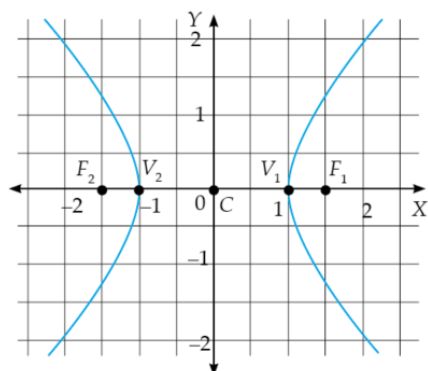
A continuación, se presentan ejemplos de ecuaciones generales clasificadas según los valores y signos de los coeficientes A y C .

Tipo de cónica	Ecuación general	Comportamiento de A y C
Circunferencia	$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$	$A = C = 1 > 0$
Elipse	$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 25 = 0$	$A = 4, C = 9$; ambos positivos
Hipérbola	$9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 41 = 0$	$A = 9, C = -4$; signos contrarios
Parábola	$x^2 - 4x + 5y + 6 = 0$	Solo x^2 presente; $C = 0$
Punto (elipse degenerada)	$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y + 25 = 0$	Representa el punto $(2, -1)$
Conjunto vacío	$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 76 = 0$	No tiene solución real
Dos rectas que se cortan	$x^2 - y^2 = 0$	Forma canónica de hipérbola degenerada
Recta	$3x + 2y - 6 = 0$	No hay términos cuadráticos; $A = C = 0$

Evaluación formativa 6.1

1. Calcula lo que se te pide a partir de la información dada en las siguientes hipérbolas.

a)



Es una hipérbola _____

con centro en _____

Su eje transversal coincide
con el eje _____

$a =$

$b =$

$c =$

$e =$

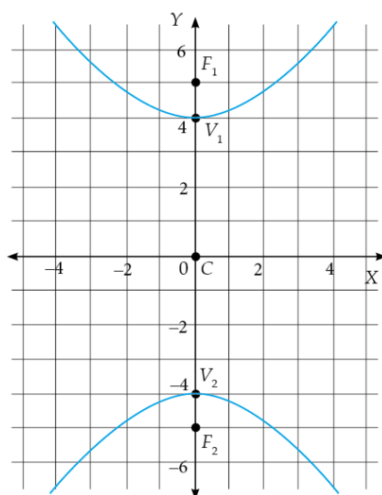
$lr =$

Distancia focal:

Longitud del eje transversal: _

Longitud del eje conjugado: _

b)



Es una hipérbola _____

con centro en _____

Su eje transversal coincide
con el eje _____

$a =$

$b =$

$c =$

$e =$

$lr =$

Distancia focal:

Longitud del eje transversal: _

Longitud del eje conjugado: _

2. Determina los elementos de las siguientes hipérbolas y grafícalas.

a) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1$

c) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

d) $5y^2 - 16x^2 + 400 = 0$

3. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en el origen, dados los siguientes elementos.

a) $V_2(-4, 0)$ y $V_1(4, 0)$, $F_2(-5, 0)$ y $F_1(5, 0)$

b) Uno de sus focos es el punto $(2\sqrt{3}, 0)$ y el lado recto es $2\sqrt{2}$.

c) Un vértice en $(2\sqrt{3}, 0)$, un foco en $(4, 0)$ y su eje conjugado sobre el eje de las ordenadas.

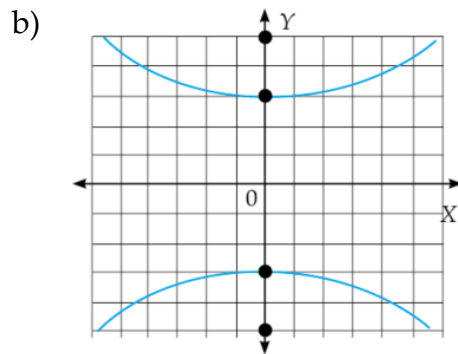
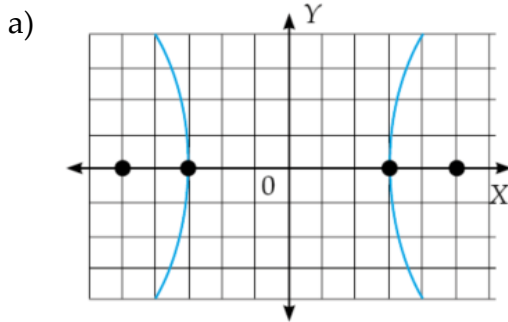
d) Extremos del eje conjugado $B_1(0, 1)$ y $B_2(0, -1)$ y la excentricidad es $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

4. Determina la excentricidad de las siguientes hipérbolas y explica el efecto que esta tiene sobre sus gráficas.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{100} = 1$

b) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} = 1$

5. Determina la ecuación ordinaria que representa a cada una de las siguientes gráficas.



6. Determina los elementos de las siguientes hipérbolas y gráficas.

a) $\frac{(y-1)^2}{36} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

7. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola con eje transversal paralelo al eje X , sabiendo que:

a) $a = 3, b = 2$ y $C(1, 3)$

b) $2b = 8, e = \frac{5}{3}$ y $C(0, -5)$

8. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola con eje transversal paralelo al eje Y , sabiendo que:

a) $2c = 12, e = \frac{6}{5}$ y $C(3, 0)$

b) $2a = 16, e = \frac{5}{3}$ y $C(-1, -3)$

9. Determina la ecuación ordinaria de la hipérbola que cumpla con las siguientes condiciones:

a) $F_1(5, 1), F_2(-5, 1), V_1(3, 1)$ y $V_2(-3, 1)$

b) $F_1(3, -3), F_2(3, -9)$ y $lr = 5$

c) $lr = 3, F_1(-4 + \sqrt{7}, -1)$ y $F_2(-4 - \sqrt{7}, -1)$

10. Determina la ecuación general de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$

b) $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+5)^2}{9} = 1$

11. Determina la ecuación ordinaria de las siguientes hipérbolas.

a) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 8 = 0$

b) $25x^2 - 4y^2 + 150x + 325 = 0$

12. Determina mediante el análisis de los coeficientes A y C , si las siguientes ecuaciones representan una recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, un punto o un conjunto vacío.

a) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

d) $16y^2 - 9x^2 - 36x + 32y - 164 = 0$

e) $x^2 - 6x - 16y + 105 = 0$

f) $y^2 - 6x + 4x + 13 = 0$

g) $2x + y - 10 = 0$

h) $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$

i) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y + 25 = 0$

j) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 76 = 0$

k) $y^2 - x^2 = 0$

Autoevaluación y coevaluación 6.1

Nombre: _____ Plantel: _____ Grupo: _____ Turno: _____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente a la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Determiné correctamente los elementos principales de una hipérbola a partir de su ecuación ordinaria o general: centro, vértices, focos, excentricidad. (M1-C1)			
Interpreté gráficamente el comportamiento de la hipérbola y sus elementos al modificar sus parámetros. (M1-C2)			
Justifiqué la selección de una hipérbola como modelo apropiado para representar trayectorias, órbitas u ondas. (M1-C3)			
Expliqué con lenguaje matemático riguroso la relación entre la ecuación de la hipérbola y sus propiedades geométricas. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 6 y, que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con sus compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente a la retroalimentación de dudas de sus compañeros.			

Determinó correctamente los elementos principales de una hipérbola a partir de su ecuación ordinaria o general: centro, vértices, focos, excentricidad. (M1-C1)			
Interpretó gráficamente el comportamiento de la hipérbola y sus elementos al modificar sus parámetros. (M1-C2)			
Justificó la selección de una hipérbola como modelo apropiado para representar trayectorias, órbitas u ondas. (M1-C3)			
Explicó con lenguaje matemático riguroso la relación entre la ecuación de la hipérbola y sus propiedades geométricas. (M1-C4)			

Nombre y firma de quien coevalúa

Bibliografía consultada

- Juárez, J. A., Ylé, A. y Flórez, A. (2020). *Matemáticas IV. Funciones y geometría analítica*. Servicios Once Ríos Editores.
- SEP (2023a). *Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Diario Oficial de la Federación.
- SEP (2023b). *Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.
- SEP (2023c). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.
- SEP (2023d). *Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I*. Secretaría de Educación Pública.

Referencia a las fuentes de consulta de imágenes

Figura 1.1. Puntos graficados en Desmos.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 1.2. Puntos graficados en GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 2.1. Efectos de las constantes m y b en la gráfica de la línea recta.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 3.1. Efectos de las constantes h , k y r en la gráfica de la circunferencia.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 3.2. Efectos de las constantes D , E y F en la gráfica de la circunferencia.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 4.1. Efectos de las constantes h , k y p en la gráfica de la parábola vertical.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 4.2. Efectos de las constantes h , k y p en la gráfica de la parábola horizontal.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 5.1. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la elipse vertical.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 5.2. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la elipse horizontal.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 6.1. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la hipérbola vertical.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Figura 6.2. Efectos de las constantes h , k , a y b en la gráfica de la hipérbola horizontal.

Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2025).

Referencia a las fuentes de consulta de códigos QR

QR 1.1. Distancia dirigida. Video de MatCódigo. https://youtu.be/6Hv_eQmXr3E

Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.1. Método de reducción. Video del profe Alex.

<https://youtu.be/UMNcW4hjQK8>

Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.2. Método de sustitución. Video del profe Alex. <https://youtu.be/cNIV-ltkpBM>

Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 2.3. Método de igualación. Video del profe Alex. <https://youtu.be/4Y59ImNoOr4>

Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 3.1. Ecuación de la circunferencia conociendo 3 puntos. Video profe Alex.

<https://youtu.be/v2YhfOWqEyM>

Fuente: Parzibyte, 2025.

QR 4.1. Distancia dirigida. Video MatCódigo. https://youtu.be/6Hv_eQmXr3E

Fuente: Parzibyte, 2025.